

等强度压电复合悬臂梁的理论建模与数值仿真

琚龙玉¹,张丛¹,邱国俊²

(1. 江苏大学 汽车与交通工程学院,江苏 镇江 212013;2. 中国石油天然气管道局第六工程公司,天津 300272)

摘要:通过理论分析和数值模拟验证了三角形压电复合悬臂梁的等强度假设,并推导了三角形压电复合悬臂梁准静态电压输出理论表达式。采用 ANSYS 11.0 对三角形压电复合悬臂梁的模式特性进行了分析,确定了层合厚度比对其固有频率的影响规律,对比了采用不同基底材料的压电梁电压输出理论值和模拟值。理论和模拟结果表明三角型压电复合悬臂梁在最优层合厚度比下的最大电压输出约为 5 V,其谐振频率约为 62 Hz。

关键词:压电悬臂梁;压电俘能器;模态分析;等强度悬臂梁;有限元分析

中图分类号:TN 3;TH 703 **文献标识码:**A

Theoretically Modelling and Numerical Simulation of Composite Piezoelectric Cantilever of Equi-strength

JU Longyu¹, ZHANG Cong¹, QIU Guojun²

(1. School of Mechanical Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China;

2. China Petroleum Pipeline Bureau (CPP) No. 6 Construction Company, Tianjin 300272, China)

Abstract: The theoretical equations for voltage output of the triangle composite piezoelectric cantilever is deduced in view of shear strain, and the equi-strength hypothesis is verified by theoretical analysis and numerical simulation. The modal characteristics of triangle composite piezoelectric cantilever is analyzed by ANSYS to determine the influence pattern of the ratio of laminated thickness on the intrinsic frequency. The theoretical and simulation values of the voltage output have been compared after deducing the theoretical equations for voltage output of the triangle composite piezoelectric cantilever and the conclusion is that the maximum voltage output is around 5 V at its natural frequency of around 62 Hz under the most appropriate thickness ratio.

Key words: piezoelectric cantilever; piezoelectric energy harvester; modal analysis; equal-strength cantilever; finite element method

0 引言

随着微机电系统(MEMS)技术的发展,低功耗和超低功耗电子器件产品逐步得到了推广,如无线传感网络中的微型传感器及精密仪器中的微驱动器。虽然这些电子器件的功耗只有毫瓦级,但供电问题限制了其发展,原因是目前人们主要采用电池为这些电子器件供电,而频繁地更换电池的成本很高;另外,一些场所是不允许采用电池供电的,如核电站及一些仓库;压电能量回收技术可将环境中的振动能量(包括声能)转换为电能,其能量转换密度可高达 80 mW/cm³,直接输出的电压为 5~65 V,其转换的能量可为一些低功耗的电子器件和传感器供电。与其他发电方式相比,压电发电具有结构简单,不发热,无电磁干扰和易于实现微小化、集成化

等优点。C. B. Williams^[1]等人最早提出弹簧-质量块阻尼振动模型来解决振动能与电能转换问题,在此基础上,后续研究主要集中在矩形压电悬臂梁的数学模型的建立和求解,以及质量块对于系统固有频率和输出电能的影响等方面。许多研究小组制作的压电振动能量采集器是基于直线型单悬臂梁结构的,采用的压电材料也大多是锆钛酸铅(PZT)材料,但实验测得的电能输出差距较大,这是由于悬臂梁的尺寸、压电层的厚度及外界施加的加速度不同引起的。悬臂梁越长,压电层越厚,外界施加的加速度越大,电能输出也越大^[2]。一些变截面梁的应力应变分布比矩形梁更均匀,单位体积的变截面压电悬臂梁的电能输出高于矩形压电悬臂梁,邓冠前^[3]、单小彪^[4]等研究了变截面单晶和双晶压电振子的截面形状对压电梁发电能力的影响,进行了数值模拟与

收稿日期:2011-07-08

作者简介:琚龙玉(1988-),男,河北省唐山市人,硕士生,主要从事汽车动力学及振动能量回收的研究。

有限元分析。本文通过对三角形单压电陶瓷层复合悬臂梁理论分析及建模仿真,着重研究了不同层合厚度比及不同基底对其发电能力的影响规律,以提高单位体积压电梁在具体工作环境中的发电能力。

1 压电复合悬臂梁的等强度力学分析

1.1 压电复合悬臂梁等强度结构假设

压电复合悬臂梁由基底材料和压电换能材料层叠而成,根据复合材料力学^[5]理论可知,当悬臂梁处于小挠度变形时,可近似地认为其平截面假设仍成立。如图1所示,令复合悬臂梁中压电层和基底层材料的厚度分别为 h_1 和 h_2 ,弹性模量分别为 E_1 和 E_2 ,中性轴的位置在距离两层材料交界处 a 处。

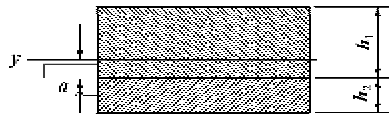


图1 压电复合悬臂梁横截面示意图

根据几何条件,复合悬臂梁在弯曲时的正应变为

$$\epsilon = y/\rho = \kappa y \quad (1)$$

式中 ρ 和 κ 分别为悬臂梁弯曲时的曲率半径和曲率,其静力学平衡条件为

$$M = \frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y^2 dA + \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y^2 dA \quad (2)$$

式中: A_1 和 A_2 分别为压电层和基底层的横截面积; y 为梁横截面积内任一点到中性轴的距离。将式(2)改写可得

$$M = \frac{1}{\rho} (E_1 I_1 + E_2 I_2) \quad (3)$$

式中 I_1 和 I_2 分别为压电层和基底层的惯性矩。将式(3)代入式(1)后可得

$$\epsilon = \frac{My}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \quad (4)$$

由式(4)可见,压电复合悬臂梁的应变分布仍为线性。两种材料对全截面中性轴的惯性矩可表示为将压电复合悬臂梁设计成等强度梁的结构时为一薄三棱柱,即梁的俯视图为一个等腰三角形。其强度分布与单层等强度悬臂梁不同,对其进行推导可得

$$T_{x1} = [E_1 F(L-x)y] / \left[E_1 \frac{h_1^3}{12} \left(\frac{L-x}{L} \right) B + E_1 A_1 \left(\frac{h_1}{2} - a \right)^2 + E_2 \frac{h_2^3}{12} \left(\frac{L-x}{L} \right) B + E_2 A_2 \left(\frac{h_2}{2} + a \right)^2 \right] \quad (5)$$

式中: F 为梁的端部集中力; L 为悬臂梁长度; B 为

梁的悬臂端宽度; E 为复合梁的等效弹性模量; T_{x1} 为压电复合悬臂梁横截面在弯曲时压电材料层所受到的法向正应力。复合梁端部受集中载荷时其剪切应力和切应变不能忽略,根据 IRE 标准将切应力 τ_{xy} 写为 T_6 , 则

$$T_6 = \frac{LF}{(L-x)B(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \int_{A^*} E_1 y dA \quad (6)$$

式中 A^* 为待求切应力处水平线一侧的面积。

1.2 压电复合悬臂梁等强度有限元模拟

本文研究的复合悬臂梁分别由不同的金属层与压电陶瓷 PZT-5H 层复合而成,各材料的力学参数如表1所示。本文作者试图利用商用有限元软件 ANSYS 11.0 对其进行数值模拟。模拟结果证明,当总厚度不变时,压电复合悬臂梁与单层压电悬臂梁的强度分布相似;当压电复合悬臂梁中压电层与基底层的厚度比(即压电层厚度比)发生改变时,压电复合悬臂梁内部任一点处的纵向正应变变量值变化很小,如图2所示。

表1 复合悬臂梁材料的力学参数

材料	弹性模量/GPa	密度/(kg/m³)	泊松比
磷青铜	106	8 900	0.35
黄铜	89	8 800	0.32
镍合金	106	8 920	0.35
铝	17	2 750	0.42
PZT-5A	121	7 750	0.32

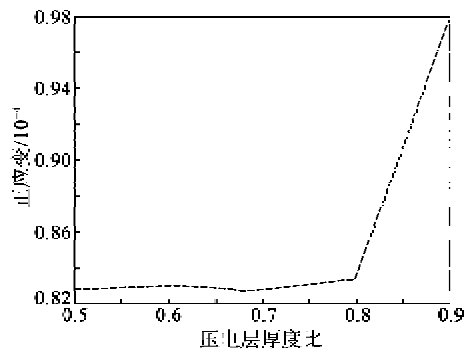
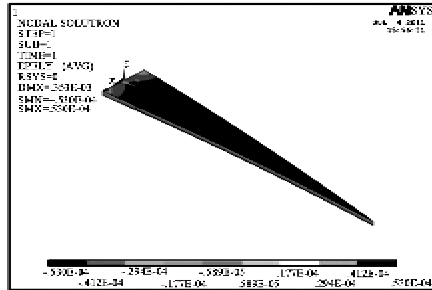


图2 压电层厚度比-正应变关系曲线图

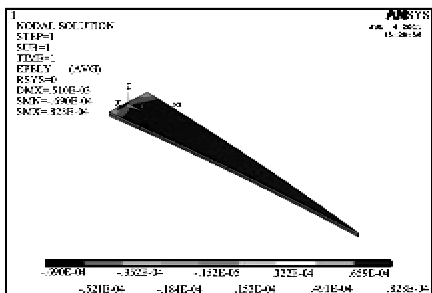
首先采用弹性模量最为接近 PZT 的磷青铜材料作为基底层进行模拟。结果表明,随着复合悬臂梁中压电层厚度比的不断增加,梁端部在集中力作用下其压电层内部的正应变缓慢增加,直至厚度比增大到接近 0.9 时,正应变骤增。

图3为单层压电悬臂梁弯曲变形正应变分布及压电层厚度比为 0.5 时弯曲后的正应变分布。由图可知,不论百分比如何变化,复合悬臂梁内部纵坐标

给定处的任一平面正应变基本上保持为一恒值。因此可近似认为压电复合三角形梁为等强度梁。



(a) 单层压电悬臂梁弯曲变形正应变分布



(b) 压电层厚度比为 0.5 时弯曲后的正应变分布

图 3 单层压电悬臂梁弯曲变形正应变分布及压电层厚度比为 0.5 时弯曲后的正应变分布

2 压电复合等强度悬臂梁的模态数值模拟

本文采用有限元软件 ANSYS 11.0 对压电复合等强度悬臂梁的模态进行了有限元模拟,压电材料为 PZT-5H,基底材料为磷青铜。基底层参数 $L=120\text{ mm}$, $B=20\text{ mm}$, $h_2=0.5\text{ mm}$;压电层的厚度范围为 $0.1\sim 0.5\text{ mm}$ 。图 4 为复合压电悬臂梁层间厚度比与悬臂梁固有频率关系曲线。由图可知,压电复合悬臂梁的一阶固有频率随着厚度比的增加而呈非线性增加。图 5 为厚度比为 0.5 时的复合压电悬臂梁三阶固有频率振型图。

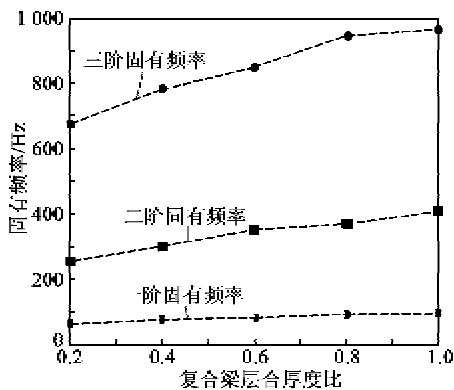
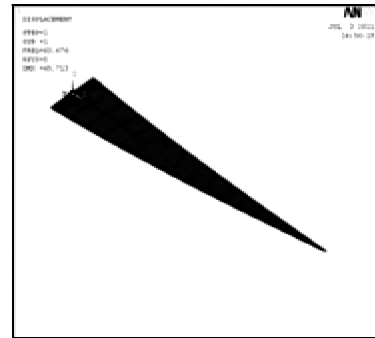
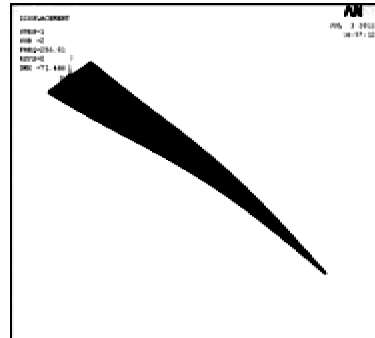


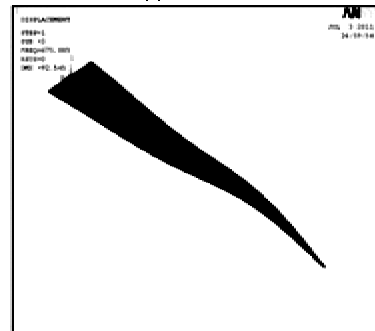
图 4 复合压电悬臂梁层间厚度比与悬臂梁固有频率关系曲线



(a) 第一阶振型



(b) 第二阶振型



(c) 第三阶振型

图 5 厚度比为 0.5 时的复合压电悬臂梁三阶固有频率振型图

3 压电复合悬臂梁的准静态力电耦合模型

上述分析给出了压电俘能器中压电复合悬臂梁层厚度比对悬臂梁固有频率的影响。此外,悬臂梁中具有不同厚度的压电层其介电特性不同。压电材料是一种具有力电耦合特性的功能材料,工作时的力电本构关系可由压电方程^[7]表示为

$$\begin{cases} S_i = s_{ij} T_j + d_{ik} E_k \\ D_k = d_{ki} T_i + \epsilon_{kn} E_n \end{cases} \quad (7)$$

式中: S_i , T_j , E_k 和 D_k 分别为应变、应力、电场强度和电位移; s_{ij} , d_{ki} 和 ϵ_{kn} 分别为弹性柔顺系数、压电应变常数及介电常数。对于压电俘能器中的等强度悬臂梁,虽然其尺寸满足 Euler-Bernoulli 梁的条件,但由于它是由两种材料层合而成的,因此在分析时仍需考虑剪切应变的影响。将式(7)的张量形式展开,可简写成

$$\begin{cases} D_3 = d_{31} T_1 + d_{33} T_3 + d_{15} T_6 + \epsilon_{33} E_3 \\ S_1 = s_{11} T_1 + s_{12} T_2 + s_{13} T_3 + d_{13} E_3 \end{cases} \quad (8)$$

将式(8)联立,可得

$$s_{11} T_1 - s_{12} T_2 - s_{13} T_3 \quad (9)$$

将式(5)、(6)代入式(9)可得电极面上产生的电荷为

$$D_3 = d_{31} T_1 + d_{33} T_3 + d_{15} T_6 + \frac{\epsilon_{33}}{d_{13}} (S_1 -$$

$$Q = \int \frac{d_{31} E_1 F(L-x) y d_{15} L F \int_{A^*} E_1 y dA + \frac{\epsilon_{33}}{d_{13}} (S_1 - s_{11} T_1)}{E_1 \frac{h_1^3}{12} \left(\frac{L-x}{L}\right) B + E_1 A_1 \left(\frac{h_1}{2} - a\right)^2 + E_2 \frac{h_2^3}{12} \left(\frac{L-x}{L}\right) B + E_2 A_2 \left(\frac{h_2}{2} + a\right)^2} \cdot \left[\frac{1}{(L-x) B (E_1 I_1 + E_2 I_2)} \right] dS \quad (10)$$

悬臂梁的理论输出电压为

$$U = \frac{Q}{C_0} = \frac{Q h_1 L}{B(L-x) \sqrt{\epsilon_{33} (1 - k_{31}^2)}} \quad (11)$$

式中 C_0 为压电层的一维截止电容。

4 压电复合悬臂梁的电压输出分析

选定层合厚度比为 0.2 时的压电复合等强度悬臂梁进行分析,将其力学、电学参数代入式(11)中,端部施加 0.01 N 的微荷载,可确定理论输出电压随坐标 x 的变化曲线,如图 6 所示。

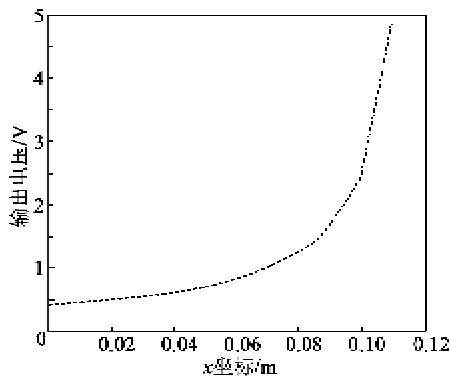


图 6 悬臂梁上表面随 x 变化的理论电压输出曲线

由于等强度的压电复合悬臂梁上表面正应变是等值的,因此由压电效应 d_{31} 所产生的电压值相同,而电压随 x 轴的输出差异是由剪切振动模态引起的。悬臂梁自由端的挠度大于固定端,因而其剪切应变变大,故电压输出高。采用不同材料作为基底,压电复合悬臂梁的最大电压输出值如表 2 所示,可见当悬臂梁的形状和规格相同时,铝的电压输出最理想。

表 2 具有不同基底材料的悬臂梁最大电压输出

材 料	磷青铜	黄铜	镍合金	铝
最大电压输出值/V	4.8	5.2	4.8	6.8

上述理论分析是从压电材料的本构关系出发进行讨论的,在实际应用中,压电复合悬臂梁的上、

下表面为正、负电极面,根据电学基本原理可知,电极面上的电势相等,因此在利用有限元软件进行模拟时,应将电极面耦合。耦合后的电极面上电势必定相等。

5 结论

1) 推导了压电复合三角悬臂梁的纵向正应力表达式,对其应变分布进行有限元仿真。结果证明,可将其近似地看作是等强度悬臂梁。

2) 对压电复合三角悬臂梁的模态进行了数值仿真,确定了悬臂梁固有频率与梁中不同材料层间厚度比的关系曲线。确定了适宜工作的厚度比。

3) 推导了考虑剪切应力/应变的压电复合三角悬臂梁准静态电压输出理论表达式,同时采用 Matlab 软件给出悬臂梁表面电压与纵向位置 x 间的关系曲线;对其进行有限元数值模拟,模拟结果与理论结果吻合良好,验证了数学模型的正确性。

参考文献:

[1] WILLIAMS C B, SHEARWOOD S, YATES R B, et al. Development of an electromagnetic micro-generator [J]. IEEE Proc: Circuits, Devices and Syst, 2001, 148 (6):337-342.

[2] 孙健,李以贵,刘景全,等.微压电式振动能量采集器的研究进展[J].微纳电子技术,2009,46(11):673-677. SUN Jian, LI Yigui, LIU Jingquan, et al. Progress of the research on the micro-piezoelectric vibrational energy harvester[J]. Technology of the Micro-electronics, 2009, 4(11):673-677.

[3] 邓冠前,陈仲生,陶利民.不同形状压电振子的振动发电行为研究[J].压电与声光,2010,32(3):440-443. DENG Guanqian, CHEN Zhongsheng, TAO Limin. Study on vibration energy harvesting behaviors of piezoelectric cantilevers with different geometries[J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2010, 32(3):440-443.

(下转第 552 页)