

压电陶瓷圆环径向厚度振动分析

向阳,王丽坤

(北京信息科技大学 北京市传感器重点实验室,北京 100101)

摘要:对压电陶瓷圆环的径向厚度振动进行了分析,使用压电理论和机械振动理论推导出压电陶瓷圆环的谐振和反谐振频率方程,采用图像法求解得到谐振频率,与实际测量结果的误差小于1%。该文还应用有限元分析软件对压电陶瓷圆环的振动模态进行了分析,并与理论计算进行了比较,结果吻合。

关键词:压电陶瓷圆环;径向厚度振动;谐振频率;有限元分析

中图分类号:O422.1; O732+.1; TN712+.5 **文献标识码:**A

Analysis of Radial Thickness Vibration of Piezoelectric Ceramic Ring

XIANG Yang, WANG Likun

(Beijing Key Lab. of Sensor, Beijing Information Science & Technology University, Beijing 100101, China)

Abstract: The radial thickness vibration of piezoelectric ceramic ring has been analyzed in this paper, and the resonance and anti-resonance frequency equations have been derived using the piezoelectric theory and mechanical vibration theory. The resonant frequencies are obtained by using the image method, and the error between the actual measurement result and the theoretical result is less than 1%. The piezoelectric ceramic ring vibration modes have also been analyzed by the finite element analysis (FEA) software. A comparison of results obtained from the theory and FEA shows that theory and experiment has good agreement.

Key words: piezoelectric ceramic ring; radial thickness vibration; resonant frequency; FEA

0 引言

现有圆柱形压电换能器通常采用其径向振动模态工作,其工作频率与圆环的半径成反比,频率越高其半径就越小,由于小尺寸的压电圆环难以加工,该类换能器工作频率一般在100 kHz以下,更高的频率很难实现。由于圆环的径向厚度振动比径向振动频率高很多,因此本文提出利用圆环的径向厚度振动模态来提高圆柱形换能器的工作频率。

目前,压电圆环的径向厚度振动的研究较少,相关的研究主要集中在其径向振动的分析。Chi Hung Huang^[1]等人对压电圆环的几种振动模态进行了详细分析,通过求解压电圆环振动位移推导其径向振动、剪切振动和轴向振动的频率方程,但未进行其径向厚度振动的分析。林书玉^[2]应用等效电路图法分析了压电陶瓷和金属双套环换能器的径向振动,但也未涉及径向厚度振动。早期创立的薄膜^[3]和薄壳理论只能处理一些薄壁及纵向和径向尺寸比

高度大几个数量级的理想情形,从而给实际应用带来不便。为了完善相关理论,本文对压电陶瓷圆环的径向厚度振动进行了研究,并通过仿真和实验对理论推导进行了验证。

1 压电圆环径向厚度振动理论推导

1.1 压电圆环的运动方程

图1为柱坐标中的一个径向极化的压电陶瓷圆环,电极加在内、外表面。设压电陶瓷圆环的内半径为 a ,外半径为 b ,高度为 h 。压电陶瓷的基本坐标与柱坐标的对应关系为: $z \rightarrow r, x \rightarrow \theta, y \rightarrow z$ 。

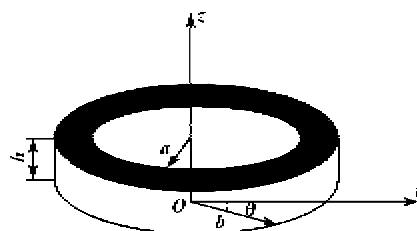


图1 柱坐标中的压电圆环

收稿日期:2011-07-27

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60871038)

作者简介:向阳(1976-),男,湖南邵阳人,硕士生,主要从事水声换能器的研究。

由于压电陶瓷圆环的几何形状、约束情况及所受外力都对称于 z 轴, 则切向的位移分量 $\xi_\theta = 0$, 切应力 $T_{\theta r} = T_{r\theta} = 0$ 。不考虑高度及耦合振动的情况下, 即 $T_z = T_{rz} = 0$ (其中 T_z 为轴向的正应力, T_{rz} 为切应力)。忽略电场的边界效应, 即 $E_z = E_\theta = 0$ 。于是 d 型压电方程^[4]可写成:

$$\begin{cases} S_\theta = s_{11}^E T_\theta + s_{13}^E T_r + d_{31} E_r \\ S_z = s_{12}^E T_\theta + s_{13}^E T_r + d_{31} E_r \\ S_r = s_{13}^E T_\theta + s_{33}^E T_r + d_{33} E_r \\ D_r = d_{31} T_\theta + d_{33} T_r + \epsilon_{33}^T E_r \end{cases} \quad (1)$$

运动方程^[4]、几何方程^[4]如下:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = \frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{T_r - T_\theta}{r} \quad (2)$$

式中: ξ_r 为径向的位移分量; T_r 为径向的正应力; T_θ 为切向的正应力。

$$\begin{cases} S_r = \partial \xi_r / \partial r \\ S_\theta = \xi_r / r \\ S_z = 0 \end{cases} \quad (3)$$

由式(1)中的第一、三式得

$$T_r = A_1 S_r + A_2 S_\theta + A_3 E_r \quad (4)$$

$$T_\theta = B_1 S_r + B_2 S_\theta + B_3 E_r \quad (5)$$

其中

$$A_1 = \frac{s_{11}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{13}^E s_{13}^E} \quad (6)$$

$$A_2 = \frac{-s_{13}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{13}^E s_{13}^E} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} A_1 k J_{n-1}(ka) + \frac{A_2 - A_1 n}{a} J_n(ka) & A_1 k Y_{n-1}(ka) + \frac{A_2 - A_1 n}{a} Y_n(ka) \\ A_1 k J_{n-1}(kb) + \frac{A_2 - A_1 n}{b} J_n(kb) & A_1 k Y_{n-1}(kb) + \frac{A_2 - A_1 n}{b} Y_n(kb) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 C E_r \frac{S'_{0,n}(ka)}{k} + \frac{A_2}{a} C E_r \frac{S_{0,n}(ka)}{k} - A_3 E_r \\ A_1 C E_r \frac{S'_{0,n}(kb)}{k} + \frac{A_2}{b} C E_r \frac{S_{0,n}(kb)}{k} - A_3 E_r \end{bmatrix} \quad (15)$$

当式(15)左边的系数行列式的值为 0 时, 系统发生谐振。即可得到圆环谐振的频率方程:

$$\begin{vmatrix} A_1 k J_{n-1}(ka) + \frac{A_2 - A_1 n}{a} J_n(ka) & A_1 k Y_{n-1}(ka) + \frac{A_2 - A_1 n}{a} Y_n(ka) \\ A_1 k J_{n-1}(kb) + \frac{A_2 - A_1 n}{b} J_n(kb) & A_1 k Y_{n-1}(kb) + \frac{A_2 - A_1 n}{b} Y_n(kb) \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

1.2 压电圆环的电路状态方程

联立式(3)~(5)代入式(1)中第四式得

$$D_r = E \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + F \frac{\xi_r}{r} + G E_r \quad (17)$$

式中: $E = d_{33} A_1 + d_{31} B_1$; $F = d_{33} A_2 + d_{31} B_2$; $G = d_{33} A_3 + d_{31} B_3 + \epsilon_{33}$ 。

$$A_3 = \frac{s_{13}^E d_{31} - s_{11}^E d_{33}}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{13}^E s_{13}^E} \quad (8)$$

$$B_1 = \frac{-s_{13}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{13}^E s_{13}^E} \quad (9)$$

$$B_2 = \frac{s_{33}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{13}^E s_{13}^E} \quad (10)$$

$$B_3 = \frac{s_{13}^E d_{33} - s_{33}^E d_{31}}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{13}^E s_{13}^E} \quad (11)$$

由于圆环的稳态振动与外加的激励电场是同频率的振动, 若激励电场是简谐变化的电场, 则

$$\xi_r = \xi \exp(j\omega t) \quad (12)$$

将式(3)~(6)代入式(2)得到圆环的运动方程:

$$\frac{d^2 \xi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\xi}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \xi + k^2 \xi + \frac{A_3 - B_3}{A_1 r} E_r = 0 \quad (13)$$

式(13)的通解为

$$\xi = C_1 J_n(kr) + C_2 Y_n(kr) - C E_r \frac{S_{0,n}(kr)}{k} \quad (14)$$

式中: $n^2 = B_2/A_1$; $k^2 = (\omega^2 \rho)/A_1$; $C = (A_3 - B_3)/A_1$; $J_n(kr)$, $Y_n(kr)$ 分别为第一、二类贝塞尔函数; C_1 和 C_2 为待定的常系数; $S_{0,n}(kr)$ 为 lommel 函数^[5]。

当压电圆环作自由振动时^[4,6], 其边界条件是 $T_r|_{r=a} = 0$ 和 $T_r|_{r=b} = 0$ 。联立式(3)、(4)、(14)及边界条件, 得

因为自由电荷 Q 只分布在内外环面上, 由高斯定理有

$$Q = 2\pi r h D_r|_{r=a} \quad (18)$$

则压电圆环电路的状态方程为

$$I = \frac{\partial Q}{\partial t} = 2j\omega\pi a h e^{j\omega t} \left\{ \frac{F - E n}{a} [C_1 J_n(ka) + \right.$$

$$C_2 Y_n(ka)] + Ek[C_1 J_{n-1}(ka) + C_2 Y_{n-1}(ka)] - \left\{ ECE_r \frac{S'_{0,n}(ka)}{k} - \frac{F}{a} CE_r \frac{S_{0,n}(ka)}{k} + GE_r \right\} \quad (19)$$

1.3 压电圆环的导纳

联立式(1)的第一、二式与式(5)得

$$E_r = H_1 \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + H_2 \frac{\xi_r}{r} \quad (20)$$

式中: $H_1 = -B_1/B_3$; $H_2 = \frac{1-B_2(s_{11}^E - s_{12}^E)}{B_3(s_{11}^E - s_{12}^E)}$ 。

于是可求出两环面间的电压^[5]:

$$V = \int_a^b E_r dr = H_1 \xi_r|_a^b + H_2 \int_a^b \frac{\xi_r}{r} dr \quad (21)$$

$$\begin{aligned} V = & H_1 e^{j\omega t} (\xi_b - \xi_a) + e^{j\omega t} [2H_2 C_1 kb J_n(kb) \cdot \\ & S_{-2,n-1}(kb) - H_2 C_1 kbn J_n(kb) \cdot \\ & S_{-2,n-1}(kb) + H_2 C_1 kb J_{n-1}(kb) \cdot \\ & S_{-1,n}(kb) + 2H_2 C_2 kb Y_n(kb) \cdot \\ & S_{-2,n-1}(kb) - H_2 C_2 kbn Y_n(kb) \cdot \\ & S_{-2,n-1}(kb) + H_2 C_2 kb Y_{n-1}(kb) \cdot \\ & S_{-1,n}(kb) - [2H_2 C_1 ka J_n(ka) \cdot \\ & S_{-2,n-1}(ka) - H_2 C_1 kan J_n(ka) \cdot \\ & S_{-2,n-1}(ka) + H_2 C_1 ka J_{n-1}(ka) \cdot \\ & S_{-1,n}(ka) + 2H_2 C_2 ka Y_n(ka) \cdot \\ & S_{-2,n-1}(ka) - H_2 C_2 kan Y_n(ka) \cdot \\ & S_{-2,n-1}(ka) + H_2 C_2 ka Y_{n-1}(ka) \cdot \\ & S_{-1,n}(ka)] - H_2 CE_r (b-a) / \\ & (n^2 - 1) + H_2 CE_r k^2 (b^3 - a^3) / \\ & [3(n^2 - 1)(9 - n^2)] - H_2 CE_r k^4 \cdot \\ & (b^5 - a^5) / [5(n^2 - 1)(9 - n^2)(25 - n^2)] \quad (22) \end{aligned}$$

把式(19),(21),(22)代入 $Y = I/V$ 可得压电圆环的导纳。当 $Y \rightarrow \infty$, 压电圆环处于谐振状态; 当 $Y = 0$ 时, 圆环处于反谐振状态, 从而可得出它的谐振和反谐振频率方程。

2 理论值与实测值的比较

2.1 用图像法求理论值

实验中, 压电陶瓷圆环的内半径 7.5 mm, 外半径 12.5 mm, 高度 3 mm, 材料采用 PZT-5。式(16)是个超越方程, 通过图像法^[7]求解。

令:

$$\begin{cases} y_1 = \left[A_1 k J_{n-1}(ka) + \frac{A_2 - A_1 n}{a} J_n(ka) \right] \times \\ \quad \left[A_1 k Y_{n-1}(kb) + \frac{A_2 - A_1 n}{b} Y_n(kb) \right] \\ y_2 = \left[A_1 k J_{n-1}(ka) + \frac{A_2 - A_1 n}{a} Y_n(ka) \right] \times \\ \quad \left[A_1 k Y_{n-1}(kb) + \frac{A_2 - A_1 n}{b} J_n(kb) \right] \end{cases} \quad (23)$$

则式(16)变成: $y_1 = y_2$ 。

使用 MATLAB 软件编程, 得到结果如图 2 所示。两条曲线的交点就是圆环的径向厚度振动的谐振频率, 从图 2 中可得谐振频率值为 291.5 kHz。

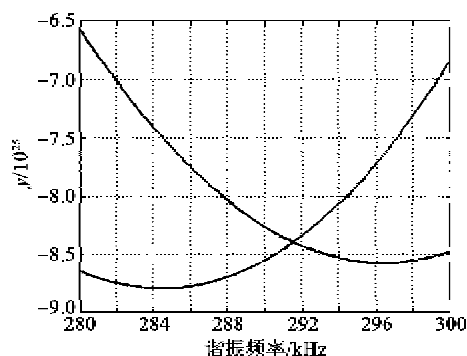


图2 谐振频率计算曲线

2.2 理论值与实测值比较

为了检验理论的正确性, 采用阻抗分析仪对该压电圆环进行测量, 得的实测值为 290 kHz。与理论值进行比较, 如表 1 所示。

表1 理论值与实测值的比较

理论值/kHz	实测值/kHz	理论值与实测值的误差/%
291.5	290.0	0.51

从表 1 可看出, 理论上的计算结果与实际测量结果间的误差只有 0.51%, 二者符合的很好, 说明该理论是正确可行的。

3 理论值与仿真值的比较

选用 Ansys 有限元软件进行仿真^[8]分析。压电陶瓷圆环的材料为 PZT-5, 选用的有限元单元是 solid5, 选择圆环的 1/12 在空气中建立三维模型, 划分网格, 在圆环的两横截面上加载对称性约束条件, 在圆环的内、外环表面均不加载电压, 然后进行模态分析。

3.1 圆环的谐振频率与厚度的关系

保持外半径 12.5 mm、高为 3 mm 不变, 改变内半径, 即厚度由 8 mm 变化到 3 mm。最后得到谐振频率与厚度的曲线如图 3 所示。

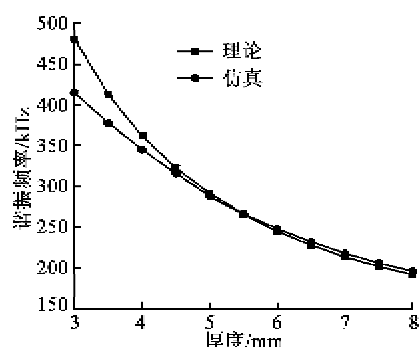


图3 谐振频率-厚度曲线

从图3可看到,圆环的厚度对谐振频率的影响显著,谐振频率随着圆环厚度的增加而急剧减小。当压电圆环的厚度从4.5 mm变化到8.0 mm时,理论值和仿真值相吻合;当其厚度小于4.5 mm时,理论值和仿真值的差别呈越来越大的趋势。出现这种情况的原因是当圆环的厚度变得很薄时,厚度振动变成了平面振动。

3.2 圆环的谐振频率与高度的关系

保持圆环的内半径7.5 mm、外半径12.5 mm,高度由2 mm变化到4 mm,得到谐振频率与高度的曲线如图4所示。

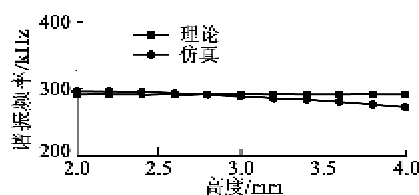


图4 谐振频率-高度曲线

从图4可看到,圆环的高度对谐振频率影响很小。当高度较小时,理论曲线与仿真曲线吻合;当高度较大时,谐振频率的仿真值随着圆环高度的增加而缓慢降低,与理论值逐渐出现差别,原因是圆环的高度较大时,出现了高度和耦合振动,而理论推导时这些振动是忽略不计的。

3.3 圆环的谐振频率与平均半径的关系

保持圆环的厚5 mm、高3 mm不变,圆环的平均半径由8.5 mm变化到13.5 mm,得到谐振频率与平均半径的曲线如图5所示。

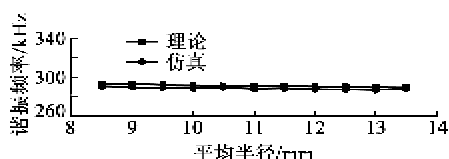


图5 谐振频率-平均半径曲线

从图5可看到,理论曲线与仿真曲线吻合,谐振频率随着平均半径的增加而降低,但降低的很少,几乎没有变化,完全可认为谐振频率与平均半径无关。

综上所述可知,影响圆环谐振频率的主要因素是圆环的厚度,圆环的高度对谐振频率有一定的影响,但影响小,而圆环的平均半径几乎对圆环的谐振频率无影响。理论与仿真实验符合的较好,对圆环的径向厚度伸缩振动进行了较全面的分析。

4 结束语

本文应用压电方程,在柱坐标下对压电陶瓷圆环的厚度振动进行了理论上的分析,得出其运动方程、电路状态方程、导纳方程、谐振频率方程和反谐振频率方程。使用有限元法进行仿真实验,实验结果与理论结果进行比较,发现影响圆环径向厚度伸缩振动的主要因素是厚度。该理论研究适用于圆环壁较厚的情景,解决了薄膜和薄壳理论不能应用于壁厚圆环的问题,因而应用范围更广泛。

参考文献:

- [1] HUANG Chihung, MA Chienching, LIN Yuchih. Theoretical, numerical, and experimental investigation on resonant vibrations of piezoceramic annular disks[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 2005, 52(8): 1204-1216.
- [2] LIN Shuyu. Radial vibration of the composite ultrasonic transducer of piezoelectric and metal rings[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2007, 54(6): 1276-1280.
- [3] EBENEZER D D, ABRAHAM P. Eigenfunction analysis of radially polarized piezoelectric cylindrical shells of finite length[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1997, 102(3): 1549-1558.
- [4] 栾桂冬, 张金铎, 王仁乾. 压电换能器和换能器阵[M]. 北京: 北京大学出版社, 2005.
- [5] 任毅, 袁晓. Lommel 函数与数字分数微分器系数的快速算法[J]. 四川大学学报, 2008, 45(1): 53-58. REN Yi, YUAN Xiao. Lommel function and fast algorithm for coefficients of digital fractional differentiators[J]. Journal of Sichuan University, 2008, 45(1): 53-58.
- [6] 高炳山, 林书玉. 径向极化厚壁压电陶瓷细长管的径向振动[J]. 压电与声光, 2010, 32(6): 991-994. GAO Bingshan, LIN Shuyu. Radial vibration of thick wall radially polarized piezoelectric ceramic slender tube[J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2010, 32(6): 991-994.
- [7] 秦雷, 王丽坤, 董天晓, 等. 压电圆环晶片堆的径向振动分析[J]. 振动与冲击, 2010, 29(12): 162-165. QIN Lei, WANG Likun, DONG Tianxiao. Analyses on radial vibration of piezoceramic discs stack[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(12): 162-165.
- [8] MO Xiping. Simulation and analysis of acoustics transducers using the ANSYS software[J]. Technical Acoustics, 2007, 26(6): 1279-1290.