

摆式陀螺寻北仪的大偏北角运动特性分析

王振业¹, 郭晓松¹, 周召发², 薛海建¹

(1. 西安市高新技术研究所, 陕西 西安, 710025; 2. 西北工业大学, 陕西 西安, 710025)

摘要:利用欧拉法建立了摆式陀螺寻北仪的运动方程,并根据摆式陀螺寻北仪的结构特点对运动方程进行部分线性化处理,得到了反映摆式陀螺寻北仪在大偏北角情况下不规则进动规律的二阶非线性微分方程组;根据李雅普诺夫稳定性理论对微分方程进行了定性分析,找出了摆式陀螺寻北仪在大偏北角运动时的平衡位置,分析结果表明,真北方向是摆式陀螺寻北仪唯一稳定的平衡位置。

关键词:欧拉法;摆式陀螺寻北仪;李雅普诺夫稳定性;二阶非线性微分方程;欧拉方程

中图分类号: TH761

文献标识码: A

The Motion Characteristics in Large Azimuth of the Pendulous Gyroscope North-seeker Analyzing

WANG Zhenye¹, GUO Xiaosong¹, ZHOU Zhaofa², XUE Haijian¹

(1. Xi'an High-tech Research Institute, Xi'an 710025, China; 2. Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710025, China)

Abstract: The motion equation of the pendulous gyroscope north-seeker is set up based on the Euler method, and which is partially linearized according with the structure characteristics of the pendulous gyroscope north-seeker, and then the nonlinear differential equations of order 2 to reflect the anomaly precession of the pendulous gyroscope north-seeker in large azimuth is found. The above differential equations are qualitatively analyzed based on the Lyapunov stability theory, and the stability position of the pendulous gyroscope north-seeker in large azimuth is found. The analyzing result shows that the real north is the only stability position of the pendulous gyroscope north-seeker.

Key words: Euler method; pendulous gyroscope north-seeker; lyapunov stability; nonlinear differential equations of order 2; Euler equation

0 引言

摆式陀螺寻北仪是一种能高精度测量真北的精密仪器,广泛应用于矿山、测绘、航空、航天等军民领域,并始终沿着全方位、全自动及高精度快速寻北的方向发展。为有效提高摆式陀螺寻北仪的性能,国内外许多学者对摆式陀螺寻北仪的运动特性进行了深入研究,有学者对摆式陀螺寻北仪的运动方程进行了合理线性化处理,并得出摆式陀螺寻北仪在小偏北角和多种小扰动情况下的运动规律,如文献[1]阐述了摆式陀螺寻北仪在不同悬带扭力矩作用下的运动情况,阿·阿·马尔德纽克^[2]分析了带小参数的非线性系统的稳定性,刘小生^[3]分析了温度、磁

场、振动等对陀螺经纬仪定向精度稳定性的影响;还有少数学者对陀螺仪在大偏北角情况下的运动规律进行了定性分析,如许江宁^[4]采用速度合成法分析了摆式陀螺寻北仪的无阻尼振荡规律,王洪兰^[5]采用奇点理论对单自由度陀螺寻北仪在大偏北角情况下的运动特性进行了定性分析。目前,尚未有文献对摆式陀螺寻北仪在大偏北角情况下的运动规律进行理论研究,这使我国对于摆式陀螺寻北仪的全方位寻北技术研究缺少必要的理论支撑,直接影响了我国摆式陀螺寻北仪全方位寻北的研究进程,因此,本文将根据李雅普诺夫稳定性理论对摆式陀螺寻北仪在大偏北角情况下的运动规律进行详细分析。

收稿日期:2012-09-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(41174162);复杂环境下的高精度快速寻北技术研究

作者简介:王振业(1984-),男,湖南娄底人,博士生,主要从事陀螺寻北技术的研究。E-mail: wzy20040412@163.com。郭晓松(1957-),男,教授,博士生导师,主要从事光电瞄准技术、自动检测技术在武器系统中的应用及故障诊断的研究。E-mail: gxs744202@163.com。

1 建立摆式陀螺寻北仪的运动方程

摆式陀螺寻北仪的大偏北角运动规律与小偏北角不同时,为分析其在大偏北角时的运动特性,需要建立摆式陀螺寻北仪在大偏北角情况下的运动方程,目前建立陀螺寻北仪运动方程的方法主要有欧拉法、拉格朗日法和达朗贝尔动静法3种,这3种方法的具体实现过程在文献[6-7]等分析陀螺力学的著作中都有详细阐述,通过分析可知,采用不同的方法得出的陀螺寻北仪运动方程是一致的,本文选用欧拉法建立摆式陀螺寻北仪在大偏北角情况下的运动方程。

为阐述运动方程的建立过程,引入惯性坐标系、地球坐标系和转子参考坐标系三大坐标系,惯性坐标系和地球坐标系各轴的选取可参考文献[8],惯性坐标系 $O-x_i y_i z_i$, 记为 i 系,地球坐标系 $O-x_n y_n z_n$, 记为 n 系,转子参考坐标系 $O-xyz$, 记为 g 系, g 系各轴指向与文献[9]相同, n 系和 i 系间的关系如图1所示,图中 ω_{ie} 为地球自转角速度, ω_N 和 ω_T 分别为地球自转角速度在 n 系中北向分量和天顶分量,且 $\omega_N = \omega_{ie} \cos \varphi$, $\omega_T = \omega_{ie} \sin \varphi$, φ 为当地纬度。

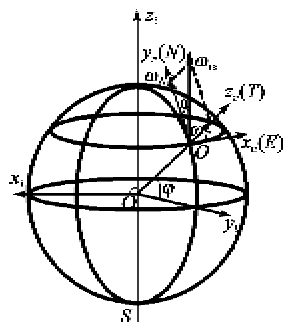


图1 n 系与 i 系间的坐标关系

$$\omega^g = C_n^g C_i^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{ie} \end{bmatrix} + C_n^g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha' \end{bmatrix} + C_i^g \begin{bmatrix} 0 \\ \beta' \\ 0 \end{bmatrix} + C_z^g \begin{bmatrix} \gamma' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \dots$$

$$\begin{bmatrix} \gamma' + \beta' \sin \beta \sin \gamma - \alpha' \sin \beta + \omega_N \cos \alpha \cos \beta & -\omega_T \sin \beta \\ \beta' \cos \gamma + \alpha' \cos \beta \sin \gamma + \omega_N (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma) & \dots + \omega_T \cos \beta \sin \gamma \\ \alpha' \cos \beta \cos \gamma - \beta' \cos \beta \sin \gamma + \omega_N (\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma) & + \omega_T \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: C_n^g 为从 n 系旋转到 g 系的方向余弦矩阵; C_i^n 为从 i 系旋转到 n 系的方向余弦矩阵; C_i^g 为从坐标系 $x_1 y_1 z_1$ 旋转到 g 系的方向余弦矩阵; C_z^g 为从坐标系 $x_2 y_2 z_2$ 旋转到 g 系的方向余弦矩阵。

由于 g 系各轴与转子的3根惯性主轴重合,因此相对于惯性主轴的惯性矩阵是对角线矩阵,即各

g 系和 n 系间的关系如图2所示。图中, α, β 和 γ 为广义欧拉角,它表示 n 系先以 α' 角速度绕 z_n 旋转 α 角到坐标系 $x_1 y_1 z_1$, 然后再分别以角速度 β' 和 γ' 绕 y_1 和 x_2 轴旋转 β 和 γ 角得到 g 系,其旋转过程可表示为 $x_n y_n z_n (z_n) \xrightarrow{\alpha'} x_1 y_1 z_1 (y_1) \xrightarrow{\beta} x_2 y_2 z_2 (x_2) \xrightarrow{\gamma'} xyz$ 。

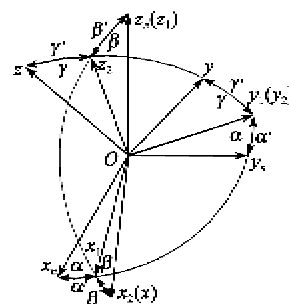


图2 g 系与 n 系间的坐标关系

1765年俄国数学家物理学家欧拉在论文“刚体绕定点运动理论”的基础上建立了欧拉动力学方程,奠定了建立陀螺仪运动方程的理论基础[4],文献[10]阐述了欧拉方程在物理学中的应用,欧拉动力学方程的向量式可表示为:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \mathbf{M} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{H}$, $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\mathbf{M}$ 分别为陀螺仪转子的角动量向量、动坐标系 g 系相对于惯性系 i 的旋转角速度向量及陀螺仪所受外力矩向量,各向量在 g 系中的投影可采用矩阵变换法得到,下面只对各向量在 g 系中的投影过程进行简述,变换过程可参考文献[1]。

动坐标系 g 系相对于惯性系 i 的旋转角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 在 g 系中的投影 $\boldsymbol{\omega}^g$ 为

转动惯量的惯性积为0,因此转子动量矩 $\mathbf{H}$ 在 g 系中的投影 $\mathbf{H}^g$ 可表示为

$$\mathbf{H}^g = \begin{bmatrix} I_x(\rho' + \omega_x) \\ I_x \omega_y \\ I_x \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_G + H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中: ρ' 为转子自转角速度; I_x, I_y, I_z 分别为沿 g 系各坐标轴的主惯性矩。

陀螺房所受的外力矩有重力矩, 摩擦力矩和悬带扭力矩 3 类, 其中悬带扭力矩又分为跟踪有扭力零位影响, 跟踪无扭力零位影响, 不跟踪有扭力零位影响和不跟踪无扭力零位影响, 文献[1]对这 4 种情况下的悬带扭力矩作详细的分析, 在此不再作详细讨论, 只引用一种最具代表性的情况, 即跟踪有扭力零位影响的情况, 此时悬带扭力矩正比于悬带零位, 方向沿悬带; 摩擦力矩与 α' 成正比, 方向与 α' 相反, 因此陀螺房所受外力矩向量 M 在 g 系中的投影 M^g 为

$$M^g = M_{\text{重}}^g + M_{\text{摩}}^g + M_{\text{悬}}^g = \begin{bmatrix} -mgl \cos \beta \sin \gamma \\ -mgl \sin \beta \\ -D_B \Delta \alpha - \lambda \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: l 为悬带长度; D_B 为悬带的扭力系数; $\Delta \alpha$ 为悬带的扭力零位; λ 为阻力系数。

将式(2)~(4)代入式(1)可得摆式陀螺寻北仪的欧拉运动方程为

$$\begin{cases} I_x \frac{d(\omega_x + \rho')}{dt} + (I_z \omega_y \omega_z - I_y \omega_x \omega_z) + mgl \sin \gamma = 0 \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (\omega_z H_G + H_z \omega_z - \omega_x H_z) + mgl \sin \beta = 0 \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (\omega_x H_y - \omega_y H_x - \omega_y H_G) + D_B \Delta \alpha + \lambda \alpha' = 0 \end{cases} \quad (5)$$

2 分析摆式陀螺寻北仪的大偏北角运动特性

由上面的分析可知, 摆式陀螺寻北仪的欧拉运动方程是一个复杂的二阶非线性微分方程, 由于叠加原理不成立, 难以得到解析形式的一般解^[6], 对于这类微分方程的处理通常有两种思路, 第一种思路是根据微分方程存在的物理环境提出合理的假设对非线性微分方程进行线性化处理, 进而得到在假设条件下的解析解, 例如当摆式陀螺寻北仪在小偏北角情况下寻北时, 可根据工程实际情况对式(5)进行线性处理, 从而得出陀螺仪主轴随时间成正弦变化的运动规律, 关于这方面论述的文献很多, 可参考文献[1, 2, 6]; 另一种处理思路是采用各种非线性微分

方程理论对微分方程所描述的运动进行定性分析, 如采用非线性微分方程几何理论、稳定性理论、振动理论等对陀螺寻北仪的运动规律进行定性分析。摆式陀螺寻北仪在大偏北角情况下运动时, 只有部分条件可进行线性化处理, 因此本文将结合上述两种思路对摆式陀螺寻北仪在大偏北角情况下的运动特性进行分析。

2.1 欧拉运动方程的线性化处理

根据摆式陀螺寻北仪的结构特点, 陀螺房重心位于陀螺轴下, 重力迫使陀螺轴保持水平位置, 这时 β 角很小, γ 角受悬带约束就更小了, β' 和 γ' 也是小量, 因此假设 $\cos \beta = \cos \gamma \approx 1$, $\sin \beta \approx \beta$, $\sin \gamma \approx \gamma$, $\omega_* = 7.29 \times 10^{-5}$ rad/s, 可当作小量来处理; 另外, 由于转子自转角速度 ρ' 远大于 α' , β' 和 γ' , 因此 H_G 远大于 H_x, H_y 和 H_z , 且可将 ρ' 近似为常值; 由于转子绕对称旋转轴旋转, 故可认为转子沿 Oy 和 Oz 方向的主惯性矩相等, 即 $I_y = I_z = I$ 。由上面的假设条件可将式(5)简化为

$$\begin{cases} I_x(\gamma'' - \alpha'\beta' - \alpha''\beta - \omega_N \alpha' \sin \alpha) + mgl \gamma = 0 \\ I(\beta'' + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma - \omega_N \alpha' \cos \alpha) + (\alpha' + \omega_T)H_G + mgl \beta = 0 \\ I\alpha'' - (\beta' + \alpha'\gamma' - \omega_N \sin \alpha)H_G + D_B \Delta \alpha + \lambda \alpha' = 0 \end{cases} \quad (6)$$

当摆式陀螺寻北仪在小偏北角情况下寻北时, 可假设 $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$, 这时可对式(6)进行进一步线性化处理, 忽略二阶以上小量, 便可得到经典的描述摆式陀螺寻北仪小偏北角运动规律的欧拉方程, 该方程在文献[1, 2, 6]中已有详细论述。

2.2 基于李雅普诺夫稳定性理论的摆式陀螺寻北仪运动特性定性分析

从式(6)可看出, 这仍是一个复杂的二阶非线性系统并难以获得运动的相轨线图, 因此不便于采用奇点理论对寻北仪的运动规律进行定性分析, 而李雅普诺夫对运动的稳定性进行了严格定义, 文献[11-14]中详细阐述了李雅普诺夫的运动稳定性理论, 有关运动稳定性的基本概念是设某一系统的状态可用变量 $x(t)$ 来表示, 用 x_0 来表示系统的平衡位置, 用 $x_0(t)$ 表示某一种特殊的运动。如果在小扰动的作用下, 差值 $x(t) - x_0(t)$ 总保持很小, 亦即系统并不远离平衡位置 x_0 , 则称 x_0 是稳定的平衡位置, 反之则该平衡位置是不稳定的, 而实际上也是

不可能存在的,同样当 $x(t) - x_0(t)$ 始终保持很小时,称运动 $x_0(t)$ 是稳定的运动^[6]。

根据李雅普诺夫稳定性理论可分析出摆式陀螺寻北仪的平衡位置,式(6)中 $\Delta\alpha$ 为常值,为简化计算,可假设陀螺房不受悬带扭力矩的影响,即假设 $\Delta\alpha=0$,根据能量守恒定律,陀螺房在重力和摩擦力矩共同作用下最终应静止在平衡位置,这时有关系 $\alpha''=\alpha'=0, \beta'=\beta=0, \gamma'=\gamma=0$,将其代入式(6)得

$$mgl\gamma=0 \quad (7)$$

$$H_G\omega_T + mgl\beta=0 \quad (8)$$

$$H_G\omega_N \sin \alpha=0 \quad (9)$$

求解式(7)~(9)可得2个解:

$$1): \gamma_0=0, \beta_0=\frac{H_G\omega_T}{mgl}, \alpha_0=0;$$

$$2): \gamma_1=0, \beta_1=\frac{H_G\omega_T}{mgl}, \alpha_1=\pi;$$

这2个解分别对应 $\alpha=0$ 和 $\alpha=\pi$ 两个平衡位置,一个是陀螺仪主轴指向正北方向,记为位置1,一个是陀螺仪主轴指向正南方向,记为位置2,下面运用李雅普诺夫稳定性理论分别对这两个平衡位置的稳定性进行分析。

2.2.1 平衡位置位于正北方向时的稳定性分析

假设在平衡位置1有一小扰动,使转子参考坐标系各轴偏离平衡位置一个小角度,即使 $\gamma=\gamma_0+\gamma_e, \beta=\beta_0+\beta_e, \alpha=\alpha_0+\alpha_e$,其中 γ_0, β_0 和 α_0 为平衡位置在正北方向时的取值, γ_e, β_e 和 α_e 为小量,分别将 γ, β 和 α 代入式(6)并约去二阶以上小量得:

$$I_x(\gamma_e'' - \alpha_e''\beta_0) + mgl\gamma_e = 0 \quad (10)$$

$$I_y(\beta_e'' - \omega_N\alpha_e') + H_G\alpha_e' + mgl\beta_e = 0 \quad (11)$$

$$I_x\alpha_e'' - (\beta_e' - \omega_N\alpha_e)H_G = 0 \quad (12)$$

对式(12)进行求导,并忽略三阶导数得

$$\beta_e'' - \omega_N\alpha_e' = 0 \quad (13)$$

将式(13)代入式(11)得

$$H_G\alpha_e' + mgl\beta_e = 0 \quad (14)$$

联立式(13)、(14)得

$$H_G\beta_e'' + \omega_N mgl\beta_e = 0 \quad (15)$$

令 $A=H_G, B=\omega_N mgl, D=B/A$, 根据二阶常系数齐次线性方程解法^[15]得到 β_e 的通解为

$$\beta_e = C_1 \cos Dt + C_2 \sin Dt \quad (16)$$

对式(13)、(16)求导,忽略三阶以上导数得

$$\alpha_e'' = 0 \quad (17)$$

$$\beta_e' = C_2 D \cos Dt + C_1 D \sin Dt \quad (18)$$

将式(17)、(18)代入式(12)得

$$\alpha_e = \frac{1}{\omega_N} (C_2 D \cos Dt + C_1 D \sin Dt) \quad (19)$$

将式(17)代入式(10)并令 $D_1 = \sqrt{B/I_x}$, 得 γ_e 的通解为

$$\gamma_e = K_1 \cos D_1 t + K_2 \sin D_1 t \quad (20)$$

式中 K_1, K_2 为常数。当纬度较低时,由式(16)、(19)和式(20)可得位置1是稳定的平衡位置,另外由式(19)可得,当纬度趋于北极或南极附近时, ω_N 趋近于0,此时 α_e 趋近于无穷,因此在高纬度地区位置A是不稳定的平衡位置。

2.2.2 平衡位置位于正南方向时的稳定性分析

假设在平衡位置2有一小扰动,使转子参考坐标系各轴偏离平衡位置一个小角度,即使 $\gamma=\gamma_1+\gamma_{e1}, \beta=\beta_1+\beta_{e1}, \alpha=\alpha_1+\alpha_{e1}$,其中 γ_1, β_1 和 α_1 为平衡位置在正南方向时的取值, γ_{e1}, β_{e1} 和 α_{e1} 为小量,分别将 γ, β 和 α 代入式(6)并约去二阶以上小量得

$$I_x(\gamma_{e1}'' - \alpha_{e1}''\beta_0) + mgl\gamma_{e1} = 0 \quad (21)$$

$$I_x(\beta_{e1}'' + \omega_N\alpha_{e1}') + H_G\alpha_{e1}' + mgl\beta_{e1} = 0 \quad (22)$$

$$I_x\alpha_{e1}'' - (\beta_{e1}' + \omega_N\alpha_{e1})H_G = 0 \quad (23)$$

对式(23)进行求导,并忽略三阶导数得

$$\beta_{e1}' + \omega_N\alpha_{e1}' = 0 \quad (24)$$

将式(24)代入式(22)得

$$H_G\alpha_{e1}' + mgl\beta_{e1} = 0 \quad (25)$$

联立式(24)和式(25)得

$$H_G\beta_{e1}'' - \omega_N mgl\beta_{e1} = 0 \quad (26)$$

令 $A=H_G, B=\omega_N mgl, D=B/A$, 根据二阶常系数齐次线性方程解法^[15]得到 β_{e1} 的通解为

$$\beta_{e1} = C_1 e^D + C_2 e^{-D} \quad (27)$$

由式(27)可得 β_{e1} 的通解为非周期解且随时间不收敛,通过分析同样可得到 α_{e1} 和 γ_{e1} 的通解均为非周期解且都随时间不收敛,因此位置2在任何情况下都是不稳定的平衡位置。

3 结论

本文首先根据欧拉动力学方程利用矩阵变换的方法建立了摆式陀螺寻北仪在大偏北角时的运动方程,然后根据摆式陀螺寻北仪的结构特点对运动方程进行了部分线性化处理,得出了一个能反映摆式陀螺寻北仪大偏北角运动规律的二阶非线性微分方程,最后根据李雅普诺夫稳定性理论对微分方程进行定性分析,通过分析得出以下结论:

1) 摆式陀螺寻北仪在大偏北角情况下的运动

方程是一个复杂的二阶非线性微分方程,不能得出解析形式的一般解,因此当陀螺仪主轴偏离真北角度较大时,摆式陀螺寻北仪将做不规则的进动。

2) 平衡位置的稳定性与纬度有关,在高纬度地区,摆式陀螺寻北仪无稳定的平衡位置,这也从另一个侧面证明了摆式陀螺寻北仪在高纬度地区的失效性。

3) 在中低纬度地区,正北方向是摆式陀螺寻北仪唯一稳定的平衡位置,平衡位置的稳定性与初始架设偏北角度无关,即无论初始架设偏北角度有多大,摆陀螺寻北仪都将向北方向进动,只要时间足够长,陀螺仪主轴将最终稳定在正北方向上,这一重要结论可为摆式陀螺寻北仪实现全方位寻北提供理论依据。

参考文献:

- [1] 煤炭科学研究院唐山分院陀螺经纬仪组. 陀螺经纬仪基本原理、结构与定向[M]. 北京:煤炭工业出版社, 1982.
- [2] 阿.阿. 马尔德纽克,孙振筠. 带小参数的非线性系统的稳定性分析[M]. 北京:科学出版社,2006.
- [3] 刘小生. 陀螺经纬仪定向精度及稳定性[M]. 北京:冶金工业出版社,2011.
- [4] 许江宁,卞鸿魏,刘强,等. 陀螺原理及应用[M]. 北京:国防工业出版社,2009.
- [5] 王洪兰. 陀螺原理及在工程测量中的应用[M]. 北京:国防工业出版社,1995.
- [6] 刘希珠,雷田玉. 陀螺力学基础[M]. 北京:清华大学出版社,1987.
- [7] 刘延柱. 陀螺力学[M]. 北京:科学出版社,1986.
- [8] 郭秀中,于波. 陀螺仪理论及应用[M]. 北京:航空工业出版社,1987.
- [9] 以光衢. 陀螺理论和应用[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,1990.
- [10] 刘式适,刘式达. 物理学中的非线性方程[M]. 北京:北京大学出版社,2012.
- [11] 陆启韶,彭临平,杨卓琴. 常微分方程与动力系统[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,2010.
- [12] 傅希林,范进军. 非线性微分方程[M]. 北京:科学出版社,2011.
- [13] 王联,王慕秋. 非线性常微分方程定性分析[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1987.
- [14] 张棣. 常微分方程定性理论及应用[M]. 西安:西北大学出版社,1985.
- [15] 同济大学应用数学系. 高等数学[M]. 北京:高等教育出版社,2002.

读者信息反馈卡(2013 年第 2 期)

- ▲您目前最感兴趣的技术问题: _____
- ▲您认为本期最佳文章: _____ 理由: _____
- ▲您认为本期欠佳文章: _____ 理由: _____
- ▲您希望本刊增加哪些内容: _____
- 读者姓名: _____ 通信地址: _____ 邮编: _____

复印有效

《压电与声光》免费索阅卡

姓名: _____ 职务: _____ 职称: _____ 单位: _____

地址: _____ 邮编: _____ 电话: _____

企业产品: _____

索阅期号: _____ 年 _____ 月(每次仅限壹期)

复印有效