

一维固-液掺杂声子晶体缺陷模的干涉理论

刘启能

(重庆工商大学 计算机科学与信息工程学院,重庆 400067)

摘要:建立了一维掺杂声子晶体的多波束干涉模型,利用波的干涉理论推导出一维掺杂声子晶体缺陷模的透射率公式和频率公式,成功地解释了一维掺杂声子晶体中缺陷模产生的物理机理。利用干涉理论和转移矩阵法对一维掺杂声子晶体缺陷模的特征进行了比较研究,两者的结论一致。

关键词:声子晶体;缺陷模;干涉理论

中图分类号:TM20;TN804;O77

文献标识码:A

Interference Theory of the Defect Mode in 1D Solid-liquid Doped Phononic Crystal

LIU Qineng

(Calculator Science College of Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: A multiple-beam interference model of 1D doped phononic crystal is established. Transmittance formula and frequency formula of the defect mode are derived by multiple-beam interference theory. The physical mechanism of defect mode in 1D doped phononic crystal is well explained. The characteristics of defect mode are studied by interference theory and transfer matrix method, resulting the same conclusion.

Key words: phononic crystal; defect mode; interference theory

0 引言

声子晶体是其介质密度在空间结构上呈周期性变化的人造带隙材料,当声波在声子晶体中传播时与声子晶体的周期结构发生相互作用产生声波的带隙。利用声子晶体中声波的带隙结构便于控制声波的传播,这使声子晶体成为控制声波传播的理想材料。声子晶体根据其周期结构的空维数不同分为一维、二维和三维声子晶体。一维声子晶体的结构最简单,研究最方便,但它却具有其他高维声子晶体的基本属性。因此对一维声子晶体的研究成为声子晶体研究领域内的重要内容。

声子晶体的研究中,在带隙特性、缺陷模特性、滤波理论及减振等方面已取得了可喜成果^[1-12]。由于一维掺杂声子晶体的缺陷模特性是研制声子晶体滤波器的理论基础,因此对一维掺杂声子晶体缺陷模的研究成为声子晶体研究中的一个重要内容。文献[13]通过引入复波数研究了弹性波垂直入射一维掺杂声子晶体的缺陷模随衰减系数的变化特征,得出了缺陷模透射峰的峰值和半高宽随衰减系数的变

化规律。随后文献[14]利用边界条件推导出弹性波斜入射一维固-固掺杂声子晶体的转移矩阵,利用转移矩阵研究了一维固-固掺杂声子晶体的缺陷模特征,得出了弹性波斜入射时一维固-固掺杂声子晶体的缺陷模随杂质厚度的变化规律。为了进一步解释产生一维掺杂声子晶体缺陷模的物理机理,文献[9]通过建立一维掺杂声子晶体的法布里-珀罗干涉仪模型即共振腔模型,利用波在共振腔内的共振条件推导出弹性波垂直入射时缺陷模频率的解析公式,利用缺陷模频率的解析公式研究了缺陷模的频率特性,并与转移矩阵法的计算结果进行比较,发现两种方法得出的结论相吻合,从而成功地解释了产生一维掺杂声子晶体缺陷模的物理机理。本文作者将这种方法称为缺陷模的共振理论。但文献[9]中存在两个明显的不足:

1) 只得出了一维掺杂声子晶体时缺陷模频率的解析公式,而在这个频率的解析公式中不能反映缺陷模的峰高和带宽两个重要特征。

2) 只得出了弹性波垂直入射时缺陷模频率的

收稿日期:2013-03-09

基金项目:重庆市教委科技基金资助项目(KJ100717)

作者简介:刘启能(1957-),男,四川泸州人,教授,主要从事光学与声学研究。E-mail:liuqineng@yahoo.com.cn。

解析公式,而对更普遍的弹性波斜入射情况下其缺陷模频率的解析公式没有给出。

为了弥补上述不足,本文将在文献[9]的基础上,利用干涉理论推导出弹性波斜入射一维固-液掺杂声子晶体时其缺陷模的透射率公式,更深入和全面地研究一维固-液掺杂声子晶体缺陷模的物理机理和变化特征。

1 缺陷模现象

设计这样一种一维固-液掺杂声子晶体,两边是由有机玻璃层 A(其密度为 ρ_1 、厚为 d_1)和水层 B(其密度为 ρ_2 、厚为 d_2)两种介质周期性地交替构成,中间是插入一环环氧树脂层 C(其密度为 ρ_3 、厚为 d_3),形成 $(AB)^N C (BA)^N$ 结构,如图 1 所示。设入射空间和出射空间的介质都为水($\rho_0 = \rho_2$), $N=5$ 。有机玻璃、水、环氧树脂的密度、波速分别为: $\rho_1 = 1180 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = \rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_3 = 1300 \text{ kg/m}^3$, $v_{1L} = 2670 \text{ m/s}$, $v_{1T} = 1120 \text{ m/s}$, $v_{2L} = v_{0L} = 1500 \text{ m/s}$, $v_{3L} = 2800 \text{ m/s}$, $v_{3T} = 1100 \text{ m/s}$, 下标 L 和 T 分别为纵波和横波。中心频率 $f_0 = 10 \text{ kHz}$ 。设归一化频率 $g = f/f_0$, f 为入射波的频率。

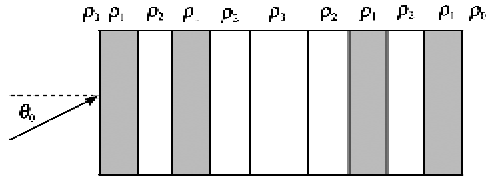


图 1 一维掺杂声子晶体

取 $d_1 = v_{1L}/4f_0$, $d_2 = v_{2L}/4f_0$, $d_3 = v_{3L}/2f_0$, 利用转移矩阵法^[15] 计算出弹性波(纵波)以入射角入射该一维固-液掺杂声子晶体,其透射系数随 g 的响应曲线如图 2 所示。由图可知,当弹性波以入射该一维固-液掺杂声子晶体时,在一级禁带的中间 $g=1$ 附近出现了一个缺陷模;在二级禁带的中间 $g=3$ 附近也出现了一个缺陷模。这表明缺陷模会随着 g 的增加周期性地出现在不同的禁带内。但转移矩阵法只能给出缺陷模的计算结果,不能对产生缺陷模的原因给出理论解释。

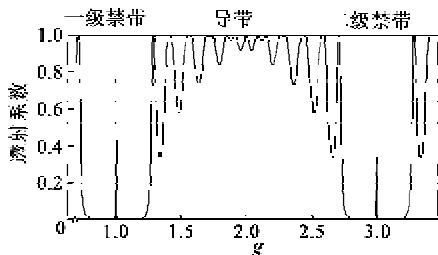


图 2 透射系数随 g 响应曲线(转移矩阵法)

2 干涉理论

为了解释一维固-液掺杂声子晶体缺陷模的产生原因,建立一维掺杂声子晶体的多波束干涉模型:该一维固-液掺杂声子晶体为 $(AB)^N C (BA)^N$ 结构,形成一个以杂质层 C 为中心层的对称结构,如图 3 所示。当弹性波进入 C 层后,会在 C 层的前后两个平行界面间往复地反射,第一束透射波为波线 1、第二束透射波为波线 2、第三束透射波为波线 3, ..., 这些无限多条波线会在透射空间发生相干干涉,相干干涉产生的透射峰就形成了该一维固-液掺杂声子晶体的缺陷模。由多波束干涉理论^[16] 可得,这无限多条波线在透射空间发生相干干涉的透射率为

$$T = \frac{1}{1 + [2r/(1-r^2)]^2 \sin^2(\delta/2)} \quad (1)$$

式中 r 为 B、C 两层界面的反射系数; δ 为相邻两条透射波线的位相差,则

$$\delta = 4\pi d_3 \cos \theta_3 / \lambda_3 \quad (2)$$

式中 θ_3 , λ_3 分别为 C 中弹性波的折射角和波长。由数学知识可知,要使式(1)出现极大值必须满足下列条件:

$$\delta/2 = 2\pi d_3 \cos \theta_3 / \lambda_3 = n\pi \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

式(3)就是出现一维掺杂声子晶体缺陷模透射峰的条件。利用折射定律 $\sin \theta_0 / v_{0L} = \sin \theta_3 / v_{3L}$ 和 $f = v_{3L} / \lambda_3$, 由式(1)得出缺陷模的 T 随 g 和 θ_0 的变化关系为

$$T = 1 / \{1 + [2r/(1-r^2)]^2 \sin^2 [2\pi d_3 \cdot g f_0 \sqrt{1 - v_{3L}^2 \sin^2 \theta_0 / v_{0L}^2} / v_{3L}]\} \quad (4)$$

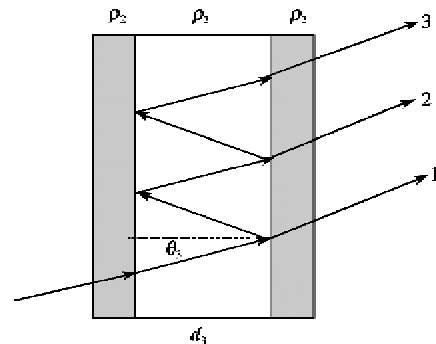


图 3 多波束干涉模型

由式(3)可知缺陷模峰值的归一化频率满足的条件为

$$g_n = n v_{3L} / (2 d_3 f_0 \sqrt{1 - v_{3L}^2 \sin^2 \theta_0 / v_{0L}^2}) \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

式中 n 为缺陷模的级数, $n=1$ 对应一级缺陷模,其

归一化频率为 g_1 , $n=22$ 对应二级缺陷模, 其归一化频率为 g_2, \dots 。取 $d_1 = v_{1L}/4f_0, d_2 = v_{2L}/4f_0, d_3 = v_{3L}/2f_0, \theta_0 = 0.1 \text{ rad}$, 由式(4)计算可得缺陷模的 T 随 g 的响应曲线, 如图 4 所示。由图可看出, 在 $g=1, 2, 3, \dots$ 附近出现了一级、二级、三级缺陷模...。结合图 2 可知, $g=2, 4, 6, \dots$ 附近是该一维固-液掺杂声子晶体导带所在的位置, 所以在这些位置的缺陷模会被导带淹没。因此, 该一维固-液掺杂声子晶体只能出现 $n=1, 3, 5, \dots$ 奇数级缺陷模。比较图 2、4 可看出, 干涉理论的结果与转移矩阵法的结果是吻合的, 这表明干涉理论能成功地解释产生一维固-液掺杂声子晶体缺陷模的原因。

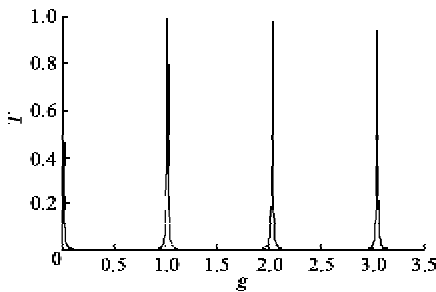


图 4 T 随 g 的响应曲线(干涉理论)

由式(5)可推出波垂直入射($\theta_0 = 0$)时, 缺陷模峰值频率($f_n = g_n f_0$)满足的关系:

$$f_n = n v_{3L} / 2d_3 \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

式(6)正是文献[9]中由共振腔模型推出的缺陷模频率公式。由此表明, 前面由于干涉理论推导出了式(4)、(5)比文献[9]得出的结果能更全面地、深刻地揭示了产生一维固-液掺杂声子晶体缺陷模的物理机理。

3 缺陷模的特征分析

为了进一步说明缺陷模干涉理论的正确性, 利用干涉理论和转移矩阵法对缺陷模的特征进行比较研究。

3.1 缺陷模随入射角的变化

取 $d_1 = v_{1L}/4f_0, d_2 = v_{2L}/4f_0, d_3 = v_{3L}/2f_0$, 利用转移矩阵法和式(5)计算出一级缺陷模的 g 随 θ_n 的响应曲线, 分别如图 5、6 所示。比较图 5、6 和式(5)可得出:

1) 干涉理论的结果与转移矩阵法的结果一致。缺陷模的 g 都随 θ_0 的增加而增大, 即按式(5)中的函数规律变化。缺陷模的频率宽度随着 θ_0 的增加而无明显变化。

2) 干涉理论的结果与转移矩阵法的结果也存

在细微差别, 干涉理论的结果中缺陷模的 g 随 θ_0 的增加而增大的速度约大。

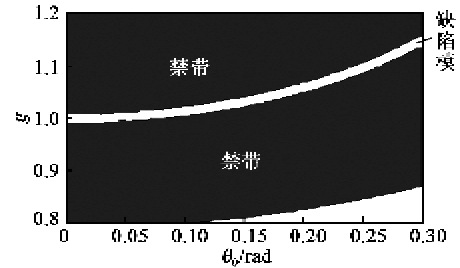


图 5 g 随 θ_0 响应曲线(转移矩阵法)

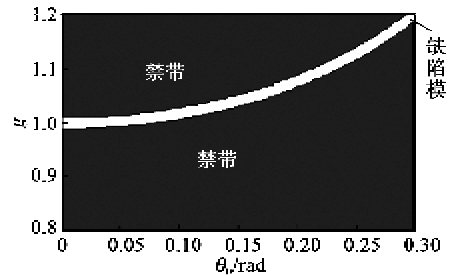


图 6 g 随 θ_0 响应曲线(干涉理论)

3.2 缺陷模随掺杂厚度的变化

掺杂厚度即 d_a , 为了研究方便令 $d_a = X v_{3L} / f_0$, X 为无量纲的参变量, 掺杂厚度的变化通过 X 的变化实现, 式(4)、(5)可化为随 X 的变化函数:

$$T = 1 / \{ 1 + [2r / (1 - r^2)]^2 \cdot \sin^2 [2\pi X g \sqrt{1 - v_{3L}^2 \sin^2 \theta_0 / v_{0L}^2}] \} \quad (7)$$

$$g_n = n / (2X \sqrt{1 - v_{3L}^2 \sin^2 \theta_0 / v_{0L}^2}) \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

固定 $\theta_0 = 0.1 \text{ rad}$, 利用转移矩阵法和式(7)计算出缺陷模的 g 随 X 的响应曲线, 分别如图 7、8 所示。比较图 7、8 和式(8)可得出:

1) 干涉理论的结果与转移矩阵法的结果一致。缺陷模的 g 都随 X 的增加而减小, 即按式(8)中的反比规律变化。缺陷模的归一化频率宽度随着 X 的增加而无明显变化。

2) 干涉理论的结果与转移矩阵法的结果也存在细微差别, 干涉理论的结果中缺陷模的 g 随 X 的增加而减小的速度约大。

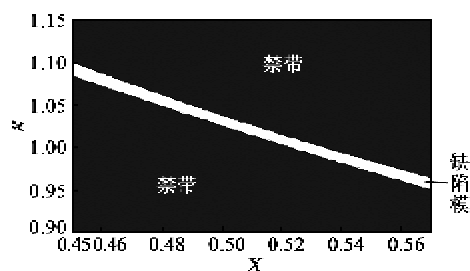


图 7 g 随 X 响应曲线(转移矩阵法)

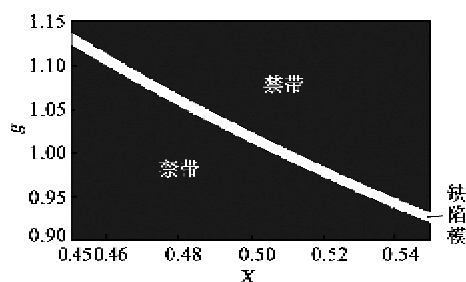


图 8 g 随 X 响应曲线(干涉理论)

缺陷模的干涉理论结果和转移矩阵法结果的一致性表明,本文建立的一维掺杂声子晶体的缺陷模干涉理论是正确的,它不仅能用波的基本原理(干涉理论)成功地解释缺陷模产生的物理机理,且能以解析公式的形式反映出缺陷模的全貌特征。干涉理论不仅弥补了转移矩阵法不能解释缺陷模产生原因的不足,且还弥补了文献[9]中建立一维掺杂声子晶体缺陷模的共振理论的不足。

4 结束语

前面通过建立一维掺杂声子晶体的多波束干涉模型,利用波的干涉理论推导出了一维掺杂声子晶体缺陷模的透射率公式和频率公式。利用透射率公式和频率公式成功地解释了一维掺杂声子晶体中缺陷模产生的物理机理,并利用干涉理论和转移矩阵法对一维掺杂声子晶体缺陷模的特征进行了比较研究,两者的结论是一致的。这种一致性表明缺陷模的干涉理论是正确的。

参考文献:

- [1] LUAN Piguang, YE Zhen. Acoustic waves propagating in 1D multilayered system[J]. Phys Rev E, 2001, 63(5):066611-066622.
- [2] JESEN J S. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 266(5):1053-1078.
- [3] WANG Gang, YU Dianlong, WEN Jihong. One-dimensional phononic crystals with locally resonant structures[J]. Physics Letters A, 2004, 327(5/6):512-521.
- [4] MARTIN H. Small-size sonic crystals with strong attenuation bands in the audible frequency range[J]. Applied Physics Letters, 2004, 84(17):3364-3366.
- [5] HOU Zhilin, FU Xiujun, LIU Youyan. Singularity of the Bloch theorem in the fluid/solid phononic crystal[J]. Physical Review B, 2005, 71(2):024304-024309.
- [6] BENCHABANEL S, KHELIFL A, CHOUJAUL A. Interaction of wave guide and localized modes in a phononic crystal[J]. Europhysics Letters, 2006, 72(4):570-575.

- [7] 温激鸿,王刚,刘耀宗. 基于集中质量法的一维声子晶体弹性波带隙计算[J]. 物理学报, 2004, 53(10):3384-3387.
WEN Jihong, WANG Gang, LIU Yaozong. Lumped-mass method on calculation of elastic band gaps of one-dimensional phononic crystals[J]. Acta Physica Sinica, 2004, 53(10):3384-3387.
- [8] 刘启能. 一维固-固结构圆柱声子晶体中弹性波的传输特性[J]. 物理学报, 2009, 26(2):397-340.
LIU Qineng. Transmission characteristics of elastic wave in 1D solid-solid cylindrical phononic crystal [J]. Acta Physica Sinica, 2009, 26(2):397-340.
- [9] 刘启能. 研究一维掺杂声子晶体缺陷模的解析方法[J]. 物理学报, 2011, 60(4):0443021-0443024.
LIU Qineng. Analytic method of studying defect mode of 1D doped phononic crystal[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(4):0443021-0443024.
- [10] 刘启能. 一维声子晶的传输特性[J]. 人工晶体学报, 2008, 37(1):179-182.
LIU Qineng. The transfer characteristic of one-dimensional phononic crystal[J]. Journal of Synthetic Crystals, 2008, 37(1):179-182.
- [11] 曹永军,杨旭,姜自磊. 弹性波通过一维复合材料系统的透射性质[J]. 物理学报, 2009, 58(11):7735-7738.
CAO Yunjun, YANG Xu, JIANG Zhilei. Transmission property of elastic wave through one-dimensional compound materials [J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(11):7735-7738.
- [12] 温熙森,温激鸿,郁殿龙,等. 声子晶体[M]. 北京:国防工业出版社, 2009:25-28.
- [13] 刘启能. 杂质吸收对一维声子晶体滤波器设计的影响[J]. 振动与冲击, 2009, 28(1):84-87.
LIU Qineng. Effect of impurity absorption on 1D photonic crystal filters [J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(1):84-87.
- [14] 刘启能. 固-固掺杂结构声子晶体中弹性波的缺陷模[J]. 计算力学学报, 2010, 27(1):151-156.
LIU Qineng. The defect model of the elastic wave in the 1D doping phononic crystal of solid-solid constitute [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2010, 27(1):151-156.
- [15] 刘启能. 固-液结构矩形掺杂声子晶体的滤波特性[J]. 计算物理, 2011, 28(2):301-304.
LIU Qineng. Filtering feature of solid-fluid rectangle doping phononic crystal[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 28(2):301-304.
- [16] E 赫克特, A 赞斯. 光学[M]. 北京:高等教育出版社, 1980:630-637.