

# 压电智能桁架结构的建模与最优振动控制

曹玉岩,付世欣,王鸣浩

(中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所,吉林 长春 130033)

**摘要:**为了实现桁架结构振动主动控制,建立了智能桁架结构动力学模型和最优振动控制模型,对动力学建模和最优控制建模方法进行了研究。首先根据有限元理论和 Hamilton 原理,建立了智能桁架结构的机电耦合动力学方程,方程中含有与作动电压有关的耦合刚度矩阵,采用缩聚变换对动力学方程进行了简化,该动力学方程可用于机械/电荷作用下结构的静动力分析和控制系统设计。然后将推导的动力学模型变换为状态空间方程的形式,根据线性二次型最优控制理论,推导了结构振动控制的数学模型,通过最小化性能泛函,求解黎卡提矩阵代数方程确定了最优控制输入。最后给出了平面桁架结构振动控制算例验证建模过程和算法。结果表明,通过最优振动控制可以使结构振动快速衰减,达到振动抑制的效果。

**关键词:**智能桁架; Hamilton 原理; 动力学; 最优振动控制

**中图分类号:** TM282; TP13 **文献标识码:** A

## Dynamic Modeling and Optimal Vibration Control of Piezoelectric Intelligent Truss Structures

CAO Yuyan, FU Shixin, WANG Minghao

(Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

**Abstract:** In order to realize active vibration control of truss structure, the dynamic model and optimal vibration control model of the intelligent truss structure are established in this paper, and the method of structural mechanics and optimal vibration modeling method are investigated. Firstly, the mech-electric coupling dynamic formulate of piezoelectric intelligent truss structures is modeled based on the finite element method and Hamilton theory. The coupling stiffness matrix which is related to control voltage is composed in dynamic formulations. The dynamic formulations are simplified by Guyan transformation. This dynamic formulation can be applied to the static/dynamic response analysis subjected to both mechanical and electrical loading. Then, the state space expressions of the dynamic formulations is obtained, and the mathematic model of vibration control is derived according to linear quadratic optimal control theory, the optimal control inputs are obtained through minimizing cost function and solving the Riccati matrix algebra equation. Finally, the numerical example of plane intelligent truss structure is given to demonstrate the modeling process and algorithm. Simulation results indicate that the vibration response can be attenuated quickly and the effectiveness of vibration suppression is obvious.

**Key words:** intelligent truss structures; Hamilton principle; dynamic; optimal vibration control

### 0 引言

随着航天事业的发展,航天器朝着轻量化、大型化方向发展,桁架结构作为一种特殊结构得到了越来越普遍的应用<sup>[1-2]</sup>。由于其自身刚度低,阻尼弱的特点,振动问题很突出,在很长一段时间内,桁架结构振动控制问题一直是研究的热点,尤其是压电陶瓷堆作动器的出现,使复杂桁架结构主动振动控制

成为可能。将作动器和传感器与桁架结构相结合形成自适应结构,在振动控制、噪声抑制、形状控制和精密定位领域具有广泛的应用前景。

本文研究了压电智能桁架结构最优振动控制问题。首先采用有限元理论建立了压电智能桁架结构的动力学方程,然后应用最优控制理论,对桁架结构进行振动控制,通过最小化性能泛函,并求解黎卡提(Riccati)矩阵代数方程确定了最优控制输入。最后

收稿日期:2013-10-19

作者简介:曹玉岩(1986-),男,吉林大安人,助理研究员,硕士,主要从事结构有限元理论及振动控制技术的研究。

给出平面智能桁架结构的仿真算例,验证建模过程和提出的振动控制算法。

### 1 压电智能桁架结构动力学建模

#### 1.1 压电作动器建模

压电陶瓷堆是由多层压电片堆叠胶合而成的,文献[3-5]详细介绍了压电材料单元的压电方程。压电作动器结构如图1所示,在电压的作用下产生轴向伸缩位移。根据压电作动器的实际结构,忽略压电陶瓷薄片连接部分影响,忽略套筒自身刚度的影响,将其简化为集中质量  $M$  和刚度为  $K$  的弹簧串联,仅考虑轴向位移,压电作动器的力学模型如图2所示。

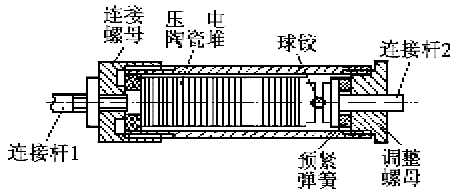


图1 压电陶瓷堆作动器结构

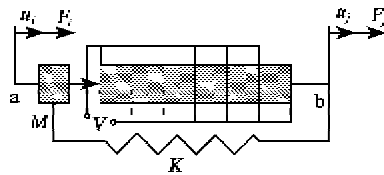


图2 压电作动器力学模型简化

轴向伸缩 PZT 压电元件机电耦合动力学方程可用 Hamilton 变分原理表述为

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0 \quad (1)$$

式中:  $L = T - U$  为 Lagrange 函数,  $T$  为系统动能,  $U$  为系统势能,  $\delta W$  为外载荷所做虚功(外载荷所做功的变分)。

由式(1)可得压电作动器单元动力学方程为

$$\begin{cases} \mathbf{M}^{(a)} \ddot{\mathbf{u}}^{(a)} + \mathbf{K}^{(a)} \mathbf{u}^{(a)} + \mathbf{K}_{wv}^{(a)} \phi = \mathbf{F}^{(a)} \\ \mathbf{K}_{wv}^{(a)} \mathbf{u}^{(a)} + \mathbf{K}_w^{(a)} \phi = -\mathbf{Q}^{(a)} \end{cases} \quad (2)$$

式中  $\mathbf{K}_{wv}^{(a)} = \mathbf{K}_{vw}^{(a)}$ , 各矩阵意义及表达式为

单元质量矩阵

$$\mathbf{M}^{(a)} = m^a \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中  $m^a = (\rho_a A l_a) / 6$ 。

单元刚度矩阵

$$\mathbf{K}^{(a)} = k^a \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中  $k^a = (g_{33}^E A) / l_a$ 。

耦合刚度矩阵

$$\mathbf{K}_{wv}^{(a)} = k_{wv}^a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中  $k_{wv}^a = (g_{33}^E d_{33} A) / l_a$ 。

介电刚度矩阵

$$\mathbf{K}_w^{(a)} = k_w^a \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中  $k_{33}^a = \frac{(\epsilon_{33}^e - g_{33}^E d_{33}^2) A}{l_a}$ 。

#### 1.2 压电智能杆机电耦合建模

设压电主动杆由两端主体部分和中间压电作动器单元构成,如图3所示,其中单元1、3为主体材料单元,单元2为压电作动器单元。

对单元1或3,其方程的具体形式为

$$\begin{bmatrix} -2m_1 & m_1 \\ -m_1 & 2m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ -F_1 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

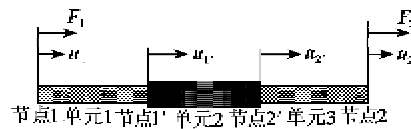


图3 主动杆示意图

对单元1、2、3的质量矩阵和刚度矩阵进行组装,得到总体刚度矩阵为

$$\begin{cases} \mathbf{M}^c \ddot{\mathbf{u}}^c + \mathbf{K}^c \mathbf{u}^c + \mathbf{K}_{wv}^c \phi = \mathbf{F}^c \\ \mathbf{K}_{wv}^c \mathbf{u}^c - \mathbf{K}_w^c \phi = -\mathbf{Q}^c \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{M}^c = \begin{bmatrix} 2m_1 & m_1 & & & \\ m_1 & 2m_1 + 2m_2 & m_2 & & \\ & m_2 & 2m_2 + 2m_3 & m_3 & \\ & & & m_3 & 2m_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{K}^c = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & & & \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \\ & & & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{K}_{wv}^c = \begin{Bmatrix} 0 \\ -k_{wv} \\ k_{wv} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_w^c = \begin{Bmatrix} 0 \\ -k_w \\ k_w \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_r \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} F_l \\ 0 \\ 0 \\ F_r \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{Q}^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_i \\ Q_j \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

为了减小系统模型维数,利用 Guyan 静态缩聚法,从四自由度  $\mathbf{u}^e = \{u_1 \ u_{1'} \ u_{2'} \ u_2\}^T$  缩减为两自由度  $\boldsymbol{\delta}^e = \{u_1 \ u_2\}^T$ ,即

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{H}\boldsymbol{\delta}^e + \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ k_1 k_2 + k_1 k_3 & k_2 k_3 \\ k_1 k_2 & k_1 k_3 + k_2 k_3 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\lambda} \begin{Bmatrix} 0 \\ k_3 k_{wv} \\ -k_1 k_{wv} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

式中  $\lambda = k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3$ 。

将式(16)代入式(8)得到主动杆的机电耦合动力学方程为

$$\begin{cases} \mathbf{M}^e \ddot{\boldsymbol{\delta}}^e + \mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e + \mathbf{K}_{wv}^e \boldsymbol{\phi} = \mathbf{F}^e \\ \mathbf{K}_{wv}^e \boldsymbol{\delta}^e - \mathbf{K}_{wv}^e \boldsymbol{\phi} = -\mathbf{Q}^e \end{cases} \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{H}^T \mathbf{M}^e \mathbf{H} \quad (20)$$

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{H}^T \mathbf{K}^e \mathbf{H} \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_{wv}^e = \mathbf{H}^T (\mathbf{K}^e \mathbf{M} + \mathbf{K}_{wv}^e) \quad (22)$$

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^e \quad (23)$$

通过缩聚变换,将压电主动杆的方程与普通杆单元具有相同的形式。根据以上推导得到了压电主动杆件模型,通过坐标变换将各单元的质量矩阵和刚度矩阵变换为总体坐标系下的特性矩阵,然后对其进行组集,即得到压电桁架结构的无阻尼动力学方程为

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\boldsymbol{\delta}} + \tilde{\mathbf{K}}\boldsymbol{\delta} + \tilde{\mathbf{K}}_{wv}\boldsymbol{\phi} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (24)$$

式中:  $\tilde{\mathbf{M}} = \sum_e \mathbf{T}^e \mathbf{M}^e \mathbf{T}^{eT} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为系统总体质量矩阵;  $\tilde{\mathbf{K}} = \sum_e \mathbf{T}^e \mathbf{K}^e \mathbf{T}^{eT} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为系统总体刚度矩阵;  $\tilde{\mathbf{K}}_{wv} = \sum_e \mathbf{T}^e \mathbf{K}_{wv}^e \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为总体耦合刚度矩阵;  $\tilde{\mathbf{F}} = \sum_e \mathbf{T}^e \mathbf{F}^e$  为总体力向量;  $\mathbf{T}$  为坐标变换矩阵;  $\boldsymbol{\delta} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ ,  $\boldsymbol{\delta} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ ,  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{R}^{r \times 1}$  分别为加速度向量、位移向量和输入控制电压;  $n, r$  分别为结构系统的自由度数目和压电作动器数目。

## 2 最优振动控制

由于桁架结构的特性矩阵如刚度矩阵、质量矩阵等均是时不变的,结构振动控制系统属于线性定常系统,根据最优控制理论,性能指标是状态变量的二次型函数,可把这种动态系统的最优控制问题视为线性二次型最优控制问题,线性二次型高斯(LQG)控制方法是现代控制理论中最优控制的典型算法<sup>[6]</sup>。

为了应用线性二次型最优控制,将式变换为状态空间方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \dot{\boldsymbol{\delta}} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}} & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{wv} \end{bmatrix} \quad (28)$$

为了能在消耗最少控制能量的情况下使结构振动迅速衰减,根据线性二次型最优控制理论,性能指标函数表达为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt \quad (29)$$

式中:  $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$  为半正定的状态加权矩阵;  $\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{r \times r}$  为正定控制加权矩阵;  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$  为对阵矩阵且常取为对角阵。

根据最优控制理论,使性能指标函数达到最小值的充分必要条件为

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{x}(t) \quad (30)$$

矩阵  $\mathbf{P}$  可通过求解 Riccati 矩阵代数方程得到,即

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = 0 \quad (31)$$

性能指标函数的最小值为

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 \quad (32)$$

采用如上反馈控制律进行结构振动控制可改善系统动态特性,其模拟结构图如图4所示:

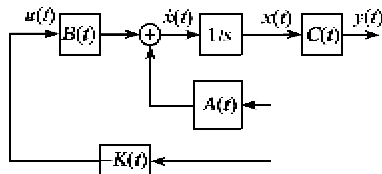


图4 压电智能桁架结构振动控制系统

### 3 仿真算例

以22节点40杆平面智能桁架结构(见图5)为例,对其进行相应的仿真分析。桁架节点和单元编号如图5所示,约束1,2号的全部自由度,桁架结构共有 $20 \times 2 = 40$ 自由度。桁架结构几何参数和材料特性参数如表1所示。

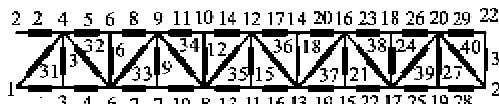


图5 平面桁架结构

表1 桁架中杆件及作动器相关参数

杆件参数		作动器参数	
长度/m	0.3	长度/m	0.1
截面积/m <sup>2</sup>	$3 \times 10^{-4}$	截面积/m <sup>2</sup>	$5 \times 10^{-4}$
弹性模量/GPa	70	弹性模量/GPa	88
密度/(kg/m <sup>3</sup> )	2700	密度/(kg/m <sup>3</sup> )	7600
		等效电致作	0.781
		动系数/(N/V)	

分析仿真,最优振动控制建模时,控制加权矩阵选取 $\mathbf{Q} = 10^6 \mathbf{I}, \mathbf{R} = \mathbf{I}$ ( $\mathbf{I}$ 为单位矩阵)。在每个杆件位置均布置作动器的情况下,共有40个压电作动器,对3种不同的初始扰动工况进行了动态响应分析,并采用提出的方法进行最优振动控制。3种不同的初始扰动工况分别为

- 1) 工况 I :  $y_{22}(0) = 1$ 。
- 2) 工况 II :  $y_{22}(0) = 0.1$ 。
- 3) 工况 III :  $\dot{y}_{22}(0) = 1$  和  $y_{22}(0) = 0.1$ 。

结构自由振动响应和最优振动控制后的响应如图6~8所示。从3种工况下初始振动响应可看出,位移初始扰动(工况II、III)比速度扰动(工况I)振动条件更复杂。采用状态反馈对结构进行最优振动控制,从3种工况下控制后的振动响应可看出,通过最优振动控制,可使结构振动快速衰减,1s后衰减

90%,1.5s后基本衰减为0,能达到很好的振动抑制效果。

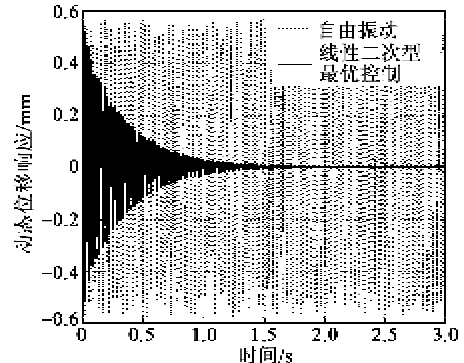


图6 工况I最优振动控制前、后22节点位移动态响应

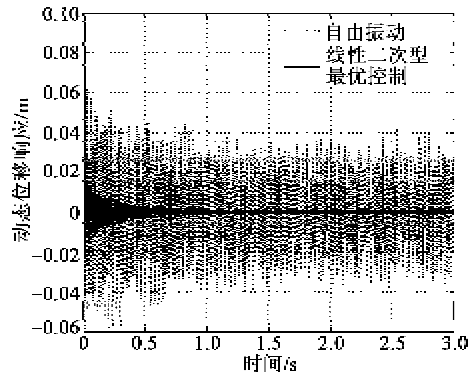


图7 工况II最优振动控制前、后22节点位移动态响应

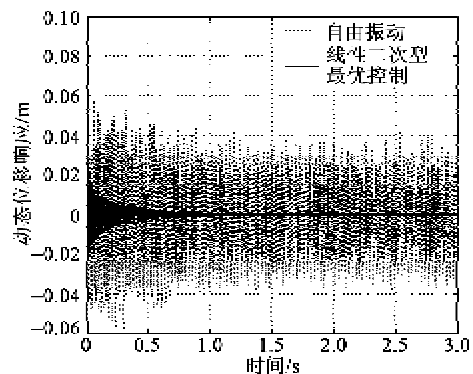


图8 工况III最优振动控制前、后22节点位移动态响应

### 4 结束语

本文对智能桁架结构主动控制问题进行了研究。首先根据有限元理论和Hamilton原理,建立了智能桁架结构的机电耦合动力学方程,并采用缩聚变换对动力学方程进行了简化。然后将动力学方程变换为状态空间方程的形式,根据线性二次型最优控制理论,推导了结构振动控制的数学模型,通过最小化性能泛函,求解黎卡提矩阵代数方程确定了最优控制输入。最后给出了3种不同工况下,平面

(下转第530页)