

# 变截面压电悬臂梁系统的建模与实验验证

王小璞,唐 炜

(西北工业大学 自动化学院,陕西 西安 710129)

**摘要:**为对变截面压电悬臂梁系统的性能进行预测、分析和优化,该文对部分覆盖压电材料的悬臂梁数学进行了建模和分析。首先根据系统的动能、悬臂梁和压电片的热力学焓等能量关系的描述,应用拉格朗日方程得到系统的机电运动方程;再采用假设模态法并依据压电悬臂梁的边界条件和相容条件,给出系统的模态振型和自然频率的计算方法。实验结果表明,测量得到的一、二阶模态频率与理论模型计算的误差小于1%,测得的频率响应和理论预测吻合,提高了压电悬臂梁模型预测的精度。

**关键词:**压电;变截面;悬臂梁;模态振型;频率响应

**中图分类号:**TN384;O313 **文献标识码:**A

## Modeling and Experimental Verification of Piezoelectric Cantilever System

WANG Xiaopu, TANG Wei

(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

**Abstract:** Dynamic modeling and analyzing of partly piezoelectric cantilever system is studied in order to predict, analyze and optimize the performance of discontinuous piezoelectric cantilever system. Firstly, the piezoelectric cantilever is segmented to present energy functions, which is substituted into the Lagrange equations to obtain electromechanical motion equation. Secondly, based on boundary conditions and compatibility conditions, calculations method of modal shape and natural frequency is given. Finally, experimental results illustrate that the error of measured frequency of the first and second modal and theoretical model calculations is less than 1%, improving the prediction accuracy of the piezoelectric cantilever system.

**Key words:** piezoelectric; discontinuous; cantilever; model shape; frequency response

### 0 引言

在很多工程应用中压电悬臂梁结构都起着重要作用。如最近研究很热的能量采集技术中,压电悬臂梁因工作频率低、能量采集效率高等特点而成为压电振动能量采集装置的首选支撑结构<sup>[1-3]</sup>。压电悬臂梁还被用于制作各种各样的传感器,包括微小质量检测装置<sup>[4-5]</sup>、新型的压电式微加速计<sup>[6-7]</sup>等。在很多情况下,精确的数学模型会减少产品的设计、测试、制作等复杂的流程。

压电悬臂梁的数学建模已被广泛的研究。Erturk等<sup>[8]</sup>对双晶压电悬臂梁进行分布参数建模,与传统的等效质量法相比提高了预测的精度。贺学峰等<sup>[9]</sup>在Erturk工作的基础上,考虑质量块的重心和

悬臂梁末端的差异,进一步提高了数学模型的精度。但这些都是考虑上下层全部覆盖压电材料的均匀悬臂梁的基础上建立的模型。本文对部分覆盖压电材料的悬臂梁系统进行了系统分析和建模,考虑压电材料对系统刚度的影响,给出了模态振型和自然频率求解方法,并实验验证了该模型。

### 1 压电悬臂梁系统的理论建模

图1为压电悬臂梁发电系统示意图。图中, $L$ 为悬臂梁的长度, $L_p$ 为压电片的长度, $h_p$ 为压电片的厚度, $h_s$ 为金属层的厚度。将其上、下两层表面分别部分覆盖均匀压电材料,其边界一端固定,另一端外挂质量块 $M$ ,其上、下层压电材料的极化方向相反,且2个压电层的电极串联后外接一个电阻 $R$

收稿日期:2013-12-07

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50905140);陕西省自然科学基金资助项目(2012JQ7003);长安大学高速公路筑养装备与技术教育部工程研究中心开放基金资助项目(2013G1502054)

作者简介:王小璞(1988-),男,山西万荣人,硕士生,主要从事微能源采集的研究。通信作者:唐炜(1977-),男,湖北襄樊人,副教授,主要从事能量采集、系统辨识等方面的研究。

(见图 2)。

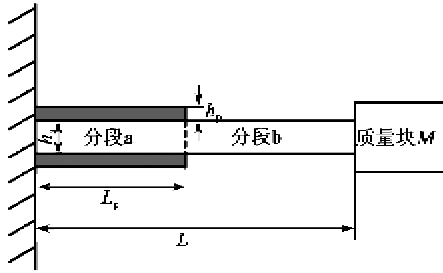


图 1 压电悬臂梁发电系统示意图

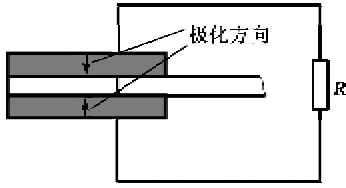


图 2 压电材料的极化方向与电极连接情况

根据压电悬臂梁的几何结构将其分为 a、b 两段,假设覆盖的压电材料与中间梁为紧密结合,没有相对位移产生。

各段的动能  $T^a$ 、 $T^b$  及  $T^M$ ,其总动能  $T = T^a + T^b + T^M$ ,其表达式分别为

$$T^a = \frac{1}{2} \int_0^{L_p} b_s \rho_s h_s \left( \frac{\partial w^a(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx + \int_0^{L_p} b_p \rho_p h_p \left( \frac{\partial w^a(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (1)$$

$$T^b = \frac{1}{2} \int_{L_p}^L b_s \rho_s h_s \left( \frac{\partial w^b(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2)$$

$$T^M = \frac{1}{2} M \left( \frac{\partial w^b(L,t)}{\partial t} \right)^2 \quad (3)$$

式中: $b, \rho, h$  分别为宽度、密度及厚度; $w(x, t)$  为压电悬臂梁的位移函数;文中上标 a、b、M 分别代表梁 a、梁 b 及质量块,下标 s、p 分别代表金属层和压电材料层。

各段的热力学焓  $H^a$ 、 $H^b$ ,其总热力学焓  $H = H^a + H^b$ ,压电材料在发生应变时,除会产生应变能外,由于压电效应还会有内部电能产生,所以各段的热力学焓表达式为

$$H^a = H_s^a + H_{p\pm}^a + H_{p\mp}^a \quad (4)$$

$$H^b = \frac{1}{2} \int_{V^b} c_{xx}^s S_x^2 dV \quad (5)$$

式中: $c_{xx}^s$  为金属材料的杨氏模量; $S_x$  为金属层在  $x$  方向的应变。第 a 段金属层热力学焓和第 b 段表达式相似,只是积分区间不同,其表达式为

$$H_s^a = \int_{V_s^a} c_{xx}^s S_x^2 dV \quad (6)$$

压电材料发生形变时,不仅存在机械势能,还会

因正压电效应而产生内部电能,所以第 a 段上面压电层的热力学焓<sup>[10]</sup>表达式为

$$H_{2\pm}^a = \frac{1}{2} \int_{V_{e\pm}^a} c_{xx}^e S_x^2 - 2e_{zx} S_x E_z - \epsilon_{zz}^e E_z^2 dV \quad (7)$$

式中: $c_{xx}^e, e_{zx}, \epsilon_{zz}^e$  分别为电场恒定时的弹性模量、压电应力系数、应变恒定时的介电常数; $E_z$  为  $z$  方向的电场强度。由于下面的压电层极化方向和上面的正好相反, $e_{zx}$  的正负号不同,所以下面压电层的表达式为

$$H_{2\mp}^a = \frac{1}{2} \int_{V_{e\mp}^a} c_{xx}^e S_x^2 - 2e_{zx} S_x E_z - \epsilon_{zz}^e E_z^2 dV \quad (8)$$

本文采用的压电悬臂梁符合欧拉贝努力梁理论假设,所以距离悬臂梁中性轴  $z$  处的应变为

$$S_x = -z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (9)$$

由于上、下压电层电极采用的是串联方式,压电片的  $z$  方向的电场强度可用负载电阻  $R$  两端的电压  $V(t)$  和  $h_p$  来表示,即

$$E_z = -\frac{V(t)}{2h_p} \quad (10)$$

非有势外力和电荷所做虚功表达式为

$$\delta W_{nc} = Q \delta V \quad (11)$$

$$\delta W_{mech} = \int_0^L f \delta w dx \quad (12)$$

式中: $f$  为非有势外力,它是  $x$  和  $t$  的函数; $V$  为负载两端的电压; $Q$  为压电层流出的电荷量。

采用假设模态法压电悬臂梁的位移函数为

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n W_i(x) r(t) \quad (13)$$

式中: $W_i(x)$  为压电悬臂梁的第  $i$  阶假设模态; $r(t)$  为相对模态参与因子,或称为广义坐标。

对于这里采用的悬臂梁,满足几何边界条件和正交性的模态为

$$W_i(x) = \begin{cases} W_i^a & 0 < x < L_p \\ W_i^b & L_p < x < L \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (14)$$

$$W^a = C_{1i}^a \cos \beta_i^a x + C_{2i}^a \sin \beta_i^a x + C_{3i}^a \cosh \beta_i^a x + C_{4i}^a \sinh \beta_i^a x \quad (15)$$

式中  $C_{1i}^a \sim C_{4i}^a$  及  $\beta_i^a (\lambda = a, b)$  是由压电悬臂梁的边界条件和相容性条件决定的系数。

为进一步将模态振型标准化,使其模态质量为单位质量,即

$$(2\rho_p b h_p + \rho_s b h_s) \int_0^{L_p} W_i^a(x)^2 dx +$$

$$\rho_s b h_s \int_{L_p}^L W_i^b(x)^2 dx + M W_i^b(L)^2 = 1 \quad (16)$$

每一个模态相应的模态频率为

$$(c_{xx}^s I_s + 2c_{xx}^p I_p) \int_0^{L_p} W_i^{a''}(x)^2 dx + c_{xx}^s I_s \int_{L_p}^L W_i^{b''}(x)^2 dx = \omega_i^2 \quad (17)$$

式中  $I_s, I_p$  分别为金属层和压电层的截面惯性矩, 可通过对压电悬臂梁系统的纯机械势能项进行空间的积分得到, 即

$$I_s = \frac{1}{12} b h_s^3 \quad (18)$$

$$I_p = \frac{1}{12} b h_p (4h_p^2 + 6h_p h_s + 3h_s^2) \quad (19)$$

根据上述能量关系式(1)~(8), 代入拉格朗日方程中可得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i(t)} - \frac{\partial T}{\partial r_i(t)} + \frac{\partial H}{\partial r_i(t)} = F_i \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{V}(t)} - \frac{\partial T}{\partial V(t)} + \frac{\partial H}{\partial V(t)} = Q \quad (21)$$

式中  $F_i$  和  $Q$  分别为总广义力和广义电荷量。广义力包括广义耗散力和非有势外力对应的广义力, 如果考虑耗散函数为瑞利函数, 则对应的广义耗散力  $F_i^d = -2\zeta \omega_i \dot{r}_i(t)$ , 而由式(12)、(13)得到非有势外力对应的广义力  $F_i^{ext} = \int_0^L f(x, t) W_i(x) dx$ 。对于串联电阻为  $R$  的电路来说, 存在  $\dot{Q}(t) = V(t)/R$  关系式。通过整理拉格朗日方程, 得到描述系统特征的微分方程组:

$$\ddot{r}_i(t) + 2\zeta \omega_i \dot{r}_i(t) + \omega_i^2 r_i(t) - \theta_i V(t) = F_i^{ext} \quad (22)$$

$$\sum_{i=0}^n \theta_i \dot{r}_i(t) + \frac{1}{2} C_p \dot{V}(t) + \frac{V(t)}{R} = 0 \quad (23)$$

式中:  $\theta_i$  为机电耦合系数;  $C_p$  为压电片的等效电容。且

$$\theta_i = \frac{1}{2} e_{xx} (h_s + h_p) W_i^a(L_p) \quad (24)$$

$$C_p = \frac{\epsilon_{33}^s L_p b}{h_p} \quad (25)$$

## 2 压电悬臂梁固有模态与自然频率

变截面压电悬臂梁梁的模态展开已由式(14)给出, 但  $W_i(x)$  中存在  $C_{1i}^a \sim C_{4i}^a, C_{1i}^b \sim C_{4i}^b, \beta^a, \beta^b$  10 个未知系数。根据欧拉贝努力梁理论得知, 均匀分布的悬臂梁的自然模态频率存在关系式为

$$\omega = \beta^p \sqrt{\frac{EI}{\rho b h}} \quad (26)$$

这里的压电梁可看成两段均匀的悬臂梁, 且两段悬臂梁的自然模态频率一致, 所以存在下面等式:

$$(\beta^a)^2 \sqrt{\frac{c_{xx}^s I_s + 2c_{xx}^p I_p}{\rho_s b h_s + 2\rho_p b h_p}} = (\beta^b)^2 \sqrt{\frac{c_{xx}^s I_s}{\rho_s b h_s}} \quad (27)$$

### 2.1 压电梁的边界条件

压电梁的固定端 ( $x=0$ )

$$W^a(0) = 0 \quad (28)$$

$$\left. \frac{dW^a(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (29)$$

压电梁的自由端 ( $x=L$ )

$$\left. \frac{d^2 W^b(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (30)$$

$$\left[ c_{xx}^s I_s \frac{d^3 W^b(x)}{dx^3} + M \omega_i^2 W^b(x) \right] \Big|_{x=L} = 0 \quad (31)$$

### 2.2 压电材料覆盖末端处 ( $x=L_p$ ) 的相容条件

$$W^a(L_p) = W^b(L_p) \quad (32)$$

$$\left. \frac{dW^a(x)}{dx} \right|_{x=L_p} = \left. \frac{dW^b(x)}{dx} \right|_{x=L_p} \quad (33)$$

$$(c_{xx}^s I_s + 2c_{xx}^p I_p) \left. \frac{d^2 W^a(x)}{dx^2} \right|_{x=L_p} = c_{xx}^s I_s \left. \frac{d^2 W^b(x)}{dx^2} \right|_{x=L_p} \quad (34)$$

$$(c_{xx}^s I_s + 2c_{xx}^p I_p) \left. \frac{d^3 W^a(x)}{dx^3} \right|_{x=L_p} = c_{xx}^s I_s \left. \frac{d^3 W^b(x)}{dx^3} \right|_{x=L_p} \quad (35)$$

利用压电梁的边界条件与相容条件, 可得关于  $C_{1i}^a \sim C_{4i}^a, C_{1i}^b \sim C_{4i}^b$  8 个未知系数的线性齐次方程组, 将方程组写矩阵形式如下:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{81} & k_{82} & \cdots & k_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^a \\ C_2^a \\ \vdots \\ C_8^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

要使式(36)存在非零解, 令系数矩阵的行列式为 0, 其根就是  $\beta^a$  或  $\beta^b$  的值, 就可根据式(26)计算出系统的固有模态频率。同时系数矩阵的秩小于 8, 齐次方程组存在无穷多的非零解。计算模态只要知道  $C_{1i}^a \sim C_{4i}^a, C_{1i}^b \sim C_{4i}^b$  之间的比例。在模态质量单位化同时给出了约束方程 (16), 得到一组  $C_{1i}^a \sim C_{4i}^a, C_{1i}^b \sim C_{4i}^b$  系数。

### 3 受迫振动响应分析

作用在压电悬臂梁上的载荷为随时间变化的分布载荷  $f(x, t)$ , 同样考虑采用分离变量法<sup>[11]</sup>:

$$f(x, t) = \sum_{i=1}^n W_i(x) f_i(t) \quad (37)$$

则运动方程(22)中对应的广义力  $F^{n \times 1}$  为

$$F_i^{n \times 1} = \sum_{i=1}^n b_{ij} f_i(t) \quad (38)$$

$$b_{ij} = \int_0^L W_i(x) W_j(x) dx \quad (39)$$

对式(37)乘以  $W_j(x)$  和  $m(x)$ , 对  $x$  积分得到:

$$\int_0^L m(x) f(x, t) W_j(x) dx = \sum_{i=1}^n f_i(t) \int_0^L m(x) W_i(x) W_j(x) dx = f_i(t) \quad (40)$$

$$m(x) = \begin{cases} 2\rho_p b h_p + \rho_s b h_s, & 0 < x < L_p \\ \rho_s b h_s, & L_p < x < L \end{cases} \quad (41)$$

式(22)的  $n$  个模态的微分方程组可写成下面矩阵形式:

$$M\ddot{r} + C\dot{r} + Kr - \Theta V = Hu \quad (42)$$

$$\frac{1}{2} C_p \dot{V} + \frac{V}{R} + \Theta^T r = 0 \quad (43)$$

式中:  $M = I_{n \times n}$ ;  $C = \text{diag}(2\zeta\omega_1, 2\zeta\omega_2, \dots, 2\zeta\omega_n)$ ;  $K = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_n^2)$ ;  $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_n]^T$ ;  $H = [b_{ij}]_{n \times n}$ ;  $u = [f_1(t), f_2(t), f_n(t)]^T$ ;  $r = [r_1(t), r_2(t), r_n(t)]^T$ .

式(42)、(43)改写成状态空间方程为

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (44)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C & M^{-1}\Theta \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & -\Theta^T/2C_p & -1/RC_p \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ -M^{-1}H \\ 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$X = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ V \end{bmatrix} \quad (47)$$

如果压电片两端的电压作为系统的输出, 则系统的输出方程表达式为

$$y = \kappa X \quad (48)$$

式中  $\kappa = [0, 0, \dots, 0, 1]_{2n+1}$  为测量压电片电压的输出矩阵。压电悬臂梁的频率响应可通过系统的传递函数画出来, 而系统的传递函数可对系统的状态空间表示式进行拉普拉斯变化得到:

$$G(s) = \kappa(sI - A)^{-1} B \quad (49)$$

#### 4 实验验证

为验证前面推导的压电悬臂梁系统数学模型, 搭建了压电悬臂梁系统的实验装置, 如图 3 所示。实验装置主要包括悬臂梁、MIDE 公司的压电片 QP16n, PCB 公司的模态力锤、装配有数据采集卡的 PC 机等。

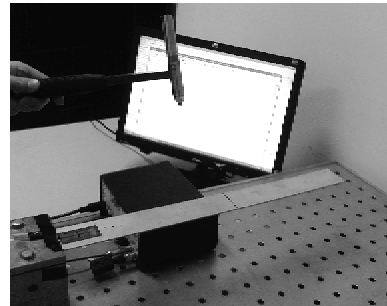


图 3 压电悬臂梁实验装置

悬臂梁的上、下各黏贴一片 QP16n 型号的压电片, 且它们的极化方向相反, 中间金属材料采用铝合金。图 3 中 PC 机就是装配了 NI 公司的 PCI-6289 多功能数据采集 (DAQ) 卡的数据采集装置。实验的悬臂梁和压电片几何尺寸和参数如表 1 所示。表中,  $Y$  为梁的弹性模量,  $e_{31}$  为压电常数,  $c_{11}$  为压电片的弹性模量,  $\epsilon_{33}^s$  为压电片的介电常数。实验中, 末端质量块质量  $M=0$ , 所采用悬臂梁的长度与厚度比为 235, 符合欧拉伯努利梁的假设。

表 1 实验的悬臂梁和压电片几何尺寸和参数

悬臂梁	$L/cm$	$b/cm$	$h/mm$	$Y/GPa$	$\rho/(kg/m^3)$		
	47	4.9	2.03	55	2 700		
压电片	$L_p/cm$	$h_p/mm$	$b_p/cm$	$e_{31}/(C/m^2)$	$c_{11}/GPa$	$\epsilon_{33}^s/(nF/m)$	$\rho_p/(kg/m^3)$
	4.6	0.254	2.06	-11.6	67	15	7 700

根据压电悬臂梁几何参数和物理参数, 采用第二节模态振型和频率的计算法, 得到压电悬臂梁的一、二阶模态频率分别为 7.1 Hz、44.1 Hz。模态力锤敲击压电悬臂梁, 如果选取模态力锤的力作为输入、压电片的电压作为输出, 则系统视为单输入单输出系统 (SISO)。为得到这种情况下系统的传递函数, 模态力锤的输入力可考虑  $f(l, t) = \delta(l) f(t)$ ,  $l$  为模态力锤敲击的位置, 得到对应的广义模态力为  $F_i^{n \times 1} = W_i(l) f(t)$ , 因此可得系统状态方程的输入矩阵  $B = [0, 0, \dots, 0, W_1(l), W_2(l), \dots, W_n(l), 0]_{2n+1}^T$ , 就可根据式(47)得到系统的传递函数, 继而

画出理论的频率响应曲线。模态力锤和上层的压电片分别连接到PC机的数据采集卡上,当使用模态力锤敲击距悬臂梁根部 $l$ 处时,PC机会记录下模态力锤和压电片的信号,然后对采集到数据进行傅里叶变化得到系统的实际幅频曲线。比较理论与实验的幅频曲线,如图4所示。由图可看出,模态实验测量所得前两阶模态频率分别为7 Hz、44.2 Hz,通过系统辨识得到2个模态下的阻尼比分别为0.3%、0.35%。通过实验数据比较,理论计算的模态频率的相对误差分别为1.4%、0.2%。理论预测的频响曲线和实验所得频响曲线吻合度良好。二阶模态下的理论和实验的偏差主要原因在实验装置的压电片与基座根部存在一定的空隙。实验所测频响曲线在10~20 Hz存在好多毛刺,这是由于模态力锤的输出和压电片输出的信噪比不好的缘故。

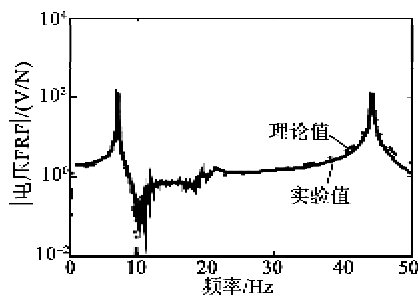


图4 压电悬臂梁系统的频响曲线

## 5 结束语

在对部分覆盖压电材料的悬臂梁系统建模时,将压电悬臂梁分成两段,利用边界条件和相容条件,得到系统的模态振型和自然频率。这种建模方法还可推广到多段分布压电材料的悬臂梁的建模,拓宽了传统压电悬臂梁建模的范围。给出了系统的状态空间方程和传递函数,并实验验证了该模型的有效性。

## 参考文献:

- [1] ANTON S R, SODANO H A. A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003-2006)[J]. *Smart Mater Struct*, 2007, 16(3): 1-21.
- [2] JEON Y B, SOOD R, JEONG J, et al. MEMS power generator with transverse mode thin film PZT[J]. *Sensor Actuat A-Phys*, 2005, 122(1): 16-22.
- [3] SHAHRUZ S M. Increasing the efficiency of energy scavengers by magnets[J]. *Journal of Computational and N*, 2008, 3(4): 041001-041012.
- [4] YI J W, SHIH W Y, SHIH W H. Effect of length, width, and mode on the mass detection sensitivity of piezoelectric unimorph cantilevers[J]. *J Appl Phys*, 2002, 91(3): 1680-1686.
- [5] 张翼, 张培仁, 王琪民, 等. 一种微质量传感器的结构与优化[J]. *机电一体化*, 2006, 12(5): 18-22.  
ZHANG Yi, ZHANG Peiren, WANG Qimin, et al. Design and optimization of a new micro-mass sensor[J]. *Mechatronics*, 2006, 12(5): 18-22.
- [6] 杨慧, 李伟红, 郭航. 体硅加工的压电式微加速度计的设计[J]. *传感技术学报*, 2008, 2(2): 237-240.  
YANG Hui, LI Weihong, GUO Hang. Design of a bulk-micromachined piezoelectric accelerometer [J]. *Chinese Journal of Sensors and Actuators*, 2008, 2(2): 237-240.
- [7] 唐洁. 压电微悬臂梁传感技术的研究[D]. 天津: 天津大学, 2005.
- [8] ERTURK A. Electromechanical modeling of piezoelectric energy harvesters[D]. Virginia Polytechnic Institute and State University, 2009.
- [9] 贺学锋, 杜志刚, 赵兴强, 等. 悬臂梁式压电振动能量采集器的建模及实验验证[J]. *光学·精密工程*, 2011, 19(8): 1771.  
HE Xuefeng, DU Zhigang, ZHAO Xingqiang, et al. Modeling and experimental verification for cantilevered piezoelectric vibration energy harvester[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2011, 19(8): 1771.
- [10] MEITZLER A, TIERSTEN H F, WARNER A W, et al. IEEE standard on piezoelectricity[S]. New York NY: ANSI/IEEE Std, 1987.
- [11] BASHASH S, SALEHI-KHOJIN A, JALILI N. Forced vibration analysis of flexible Euler-Bernoulli beams with geometrical discontinuities[C]//Washington: ACC, 2008 IEEE, 2008: 4029-4034.