

有限周期声子晶体中 SH 波能带的波叠加理论

蒋和伦, 刘启能

(重庆工商大学 计算机科学与信息工程学院, 重庆 400067)

摘要:利用波的叠加原理推导出二维有限周期声子晶体中偏振方向垂直于入射面的横波(SH)的透射率公式,即建立了一种研究二维有限周期声子晶体中 SH 波能带的新方法——波叠加法。将波叠加法和转移矩阵法进行了比较研究,结果表明,波叠加法与转移矩阵法的结果一致。波叠加法既具有转移矩阵法能对能带进行数值计算的优点,又克服了转移矩阵法不能解释能带的产生原因的缺点。因此,波叠加法是研究二维有限周期声子晶体中 SH 波能带的一种更有效的方法。

关键词:声子晶体;能带;叠加原理;转移矩阵

中图分类号:TN384;O436

文献标识码:A

Wave Superposition Theory of SH Wave Energy Band In Finite Number Cycles Phononic Crystal

JIANG Helun, LIU Qineng

(Computer Science and Information Engineering College of Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: Using the wave superposition theory, the transmittance formula of SH wave is derived in 1D finite number cycles phononic crystal, and the wave superposition theory is established. The comparative study on the wave superposition theory and the transfer matrix theory are carried out. The results show that the two methods are same. The wave superposition theory has advantages of the numerical calculation of the transfer matrix theory, while overcomes the disadvantages of the transfer matrix theory which can not interpret the cause of generating the energy band. Thus the wave superposition theory is a better way to study SH wave energy band in 1D finite number cycles phononic crystal.

Key words: phononic crystal; energy band; superposition theory; transfer matrix

0 引言

声子晶体的概念是在光子晶体的概念提出后,在1993年由M. S. Kushwsha等提出的^[1],所谓声子晶体就是其密度和弹性属性在空间呈现周期性变化的人造材料。声子晶体依据其空间周期的维数不同分为一、二、三维声子晶体。由于一维声子晶体具有结构简单和研究方便的特点,但又具有二、三维声子晶体的一些基本特征。因此对一维声子晶体的研究成为声子晶体研究领域中的重要课题。当声波在声子晶体中传播时会出现能带现象,利用声子晶体的能带可控制声波的传播^[2-7]。因此,对声子晶体能带的研究倍受重视^[8-12]。

在声子晶体中传播的弹性波分为横波(又称S

波)和纵波(又称P波)两种形式^[13]。S波又可进一步分为偏振方向平行于入射面的横波(SV波)和偏振方向垂直于入射面的横波(SH波)。SH波是一种典型的横波,它在一维声子晶体的传输特性受到人们的关注。在文献[14]中利用SH波的边界条件推导出SH波在一维声子晶体的转移矩阵,利用SH波的转移矩阵可计算一维声子晶体中SH波的能带结构。目前,转移矩阵法是研究一维有限周期声子晶体中SH波能带的主要方法。由于转移矩阵法是一种数值计算方法,它存在一个明显的缺点即不能对能带产生的原因给出解释。

能否建立一种研究一维有限周期声子晶体中SH波能带的新方法,它既具有转移矩阵法的优点

收稿日期:2015-12-07

基金项目:重庆市教委科技项目基金资助项目(KJ1400641);重庆工商大学重点项目基金资助项目(1352003)

作者简介:蒋和伦(1965-),男,重庆市铜梁人,副教授,硕士,主要从事光电子学的研究。E-mail:jianghelun@sina.com。

又能克服转移矩阵法的缺点呢? 本文对这一问题作了研究, 利用波的叠加原理推导出了一研究一维有限周期声子晶体中 SH 波能带的新方法。

1 模型与理论

设计这样一种一维有限周期声子晶体, 它由玻璃 A 层(其密度为 ρ_1 、波速为 c_1 、厚为 d_1)和氧化镁 B 层(其密度为 ρ_2 、波速为 c_2 、厚为 d_2)两种介质周期性地交替构成, 形成 $(AB)^N$ 的结构, 周期数 $N=10$, 如图 1 所示。设入射空间和出射空间的介质均为有机玻璃(密度为 ρ_0 、波速为 c_0), $\rho_0=1\ 180\text{ kg/m}^3$, $\rho_1=2\ 230\text{ kg/m}^3$, $\rho_2=1\ 740\text{ kg/m}^3$, $c_0=1\ 120\text{ m/s}$, $c_1=3\ 430\text{ m/s}$, $c_2=3\ 100\text{ m/s}$ 。取中心频率 $f_0=10\ 000\text{ Hz}$ 。设归一化频率 $g=f/f_0$, f 为入射波的频率。取 $d_1=c_1/(4f_0)$, $d_2=c_2/(4f_0)$ 。

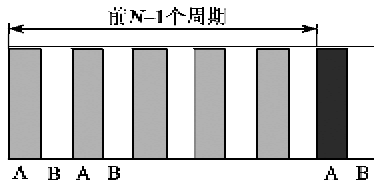


图 1 一维有限周期声子晶体

为了建立研究一维有限周期声子晶体中 SH 波能带的新方法, 首先建立一维有限周期声子晶体的谐振腔模型, 将该声子晶体的前 $N-1$ 个周期等效为薄层 1 作为谐振腔的一个腔壁, 将最后一个周期的 A 层介质作为谐振腔的腔体, 将最一个周期的 B 层介质等效为薄层 2 作为谐振腔的另一腔壁, 如图 2 所示。当 SH 波进入谐振腔后会在谐振腔的前后两个平行腔壁间往复地反射, 每往复反射一次会产生一束透射波, 这无限多束透射波会在透射空间产生相干叠加, 这些透射波相干叠加后其合振幅为 0 的位置就形成了禁带, 这些透射波相干叠加后其合振幅不为 0 的位置就形成了导带。这就解释了该声子晶体禁带和导带产生的原因。

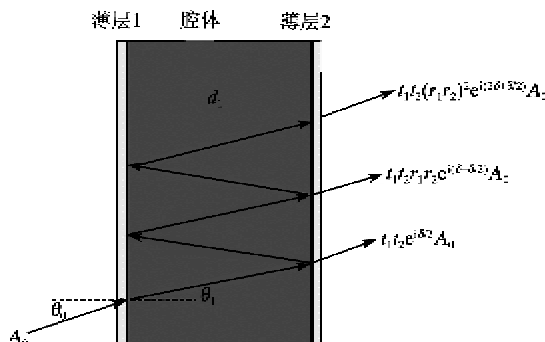


图 2 谐振腔模型

设 SH 波以振幅 A_0 入射谐振腔, SH 波穿过薄层 1、2 的透射系数分别为 t_1 和 t_2 , SH 波在薄层 1、2 腔壁的反射系数分别为 r_1, r_2 。则第 1 束透射波、第 2 束透射波、第 3 束透射波、...、第 n 束透射波的振幅分别为 $t_1 t_2 e^{i\delta/2} A_0$ 、 $t_1 t_2 r_1 r_2 e^{i(\delta+\delta/2)} A_0$ 、 $t_1 t_2 (r_1 r_2)^2 e^{i(2\delta+\delta/2)} A_0$ 、...、 $t_1 t_2 (r_1 r_2)^{n-1} e^{i[(n-1)\delta+\delta/2]} A_0$ 。它们具有等比数列关系。其中 δ 为 SH 波在腔内往复一次的相位差, 且

$$\delta = 4\pi d_1 \cos \theta_1 / \lambda_1 = 4\pi d_1 f \cos \theta_1 / c_1 \quad (1)$$

式中 λ_1 为 SH 波在腔内的波长。这些透射波叠加后的合振幅 A_t 为

$$\begin{aligned} A_t = & t_1 t_2 e^{i\delta/2} A_0 + t_1 t_2 r_1 r_2 e^{i(\delta+\delta/2)} A_0 + \\ & t_1 t_2 (r_1 r_2)^2 e^{i(2\delta+\delta/2)} A_0 + \cdots + t_1 t_2 \cdot \\ & (r_1 r_2)^{n-1} e^{i[(n-1)\delta+\delta/2]} A_0 = \\ & \frac{1 - (r_1 r_2)^n e^{i\delta/2}}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta/2}} t_1 t_2 A_0 \end{aligned} \quad (2)$$

由于是无限多束透射波相干叠加, 令 $n \rightarrow \infty$, 因 $r < 1$, 式(2)的极限为

$$A_t = \frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta/2}} t_1 t_2 e^{i\delta/2} A_0 \quad (3)$$

SH 波在透射空间的透射率 $T = A_t A_t^* / A_0 A_0^*$, 则

$$\begin{aligned} T = & \left(\frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta/2}} t_1 t_2 \right) \cdot \\ & \left(\frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta/2}} t_1 t_2 \right)^* = \\ & \frac{(t_1 t_2)^2}{1 + (r_1 r_2)^2 - 2r_1 r_2 \cos \delta} \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)是用波的叠加原理推导出一维有限周期声子晶体中 SH 波的透射率公式, 利用式(4)可以研究一维有限周期声子晶体中 SH 波能带的特性。该声子晶体的前 $N-1$ 个周期的特性是通过式(4)中的 t_1 和 r_1 反映, 该声子晶体的最一个周期的 B 层的特性是通过式(4)中的 t_2 和 r_2 反映。作者将这种方法称为一维有限周期声子晶体中 SH 波能带的波叠加法。该方法克服了转移矩阵法不能解释禁带和导带产生原因的缺点。

2 波叠加法与转移矩阵法的比较

SH 波在该一维有限周期声子晶体的转移矩阵 $M^{[1-]}$ 可表示为

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} =$$

$$m_{01}(G_1 m_{12} G_2 m_{21})^{N-1} G_1 m_{12} G_2 m_{20} \quad (5)$$

其中

$$m_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_0 k_0 \cos \theta_0 & -i\mu_0 k_0 \cos \theta_0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_1 k_1 \cos \theta_1 & -i\mu_1 k_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$m_{20} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_2 k_2 \cos \theta_2 & -i\mu_2 k_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_0 k_0 \cos \theta_0 & -i\mu_0 k_0 \cos \theta_0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$m_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_1 k_1 \cos \theta_1 & -i\mu_1 k_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_2 k_2 \cos \theta_2 & -i\mu_2 k_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$m_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_2 k_2 \cos \theta_2 & -i\mu_2 k_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_1 k_1 \cos \theta_1 & -i\mu_1 k_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} e^{i\mu_1 d_1 \cos \theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\mu_1 d_1 \cos \theta_1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} e^{i\mu_2 d_2 \cos \theta_2} & 0 \\ 0 & e^{i\mu_2 d_2 \cos \theta_2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中 $\mu = \rho c^s$ 为拉梅常数, $k_i = 2\pi f/c_i$ 。该一维有限周期声子晶体的反射系数 r 和透射系数 t 为

$$r = |M_{21}/M_{11}| \quad (12)$$

$$t = |1/M_{11}| \quad (13)$$

在不考虑材料吸收的情况下,该一维有限周期声子晶体的透射率 T 为

$$T = 1 - r^2 \quad (14)$$

利用式(5)~(14)可以研究 SH 波在该一维有限周期声子晶体中的能带特性,这种研究方法称为转移矩阵法。

转移矩阵法是根据 SH 波在界面满足的边界条件连续推导出来,而波叠加法是根据波的叠加原理推导出来的。由于波的叠加原理是波传播的基本原理,因此波叠加法比转移矩阵法的物理意义更清晰。下面对波叠加法和转移矩阵法进行比较研究。

固定入射角 $\theta_0 = 0$, 利用波叠加法和转移矩阵法计算透射率随归一化频率的响应曲线,如图 3、4 所示。比较图 3、4 可知:

1) 波叠加法和转移矩阵法计算出的一维有限周期声子晶体的禁带($T=0$)和导带($T>0$)的频率

范围是一致的。归一化频率 $g=0.87 \sim 1.13$ 范围内出现了一级禁带, $g=2.87 \sim 3.13$ 范围内出现了二级禁带。禁带外的区域为导带。

2) 波叠加法和转移矩阵法的计算结果中导带的峰形方面存在一定的差异,但这并不重要。因为研究能带的本质在于能带的频率结构,而导带的峰形并不影响能带的频率结构。

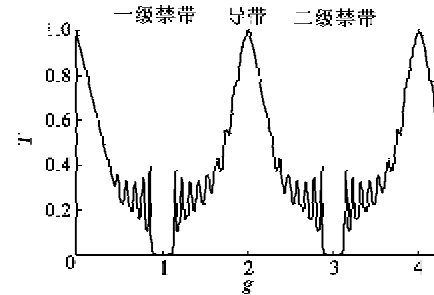


图 3 T 随 g 的响应曲线(相干叠加法)

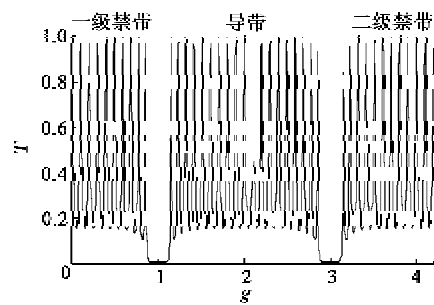


图 4 T 随 g 的响应曲线(转移矩阵法)

为了对波叠加法和转移矩阵法进行更深入的比较,下面从一级禁带的频率随入射角的变化特征和一级禁带的频率随周期厚度的变化特征两个方面来比较两种方法的结果。

2.1 禁带随入射角的变化

固定 $d_1 = c_1/(4f_0)$ 、 $d_2 = c_2/(4f_0)$ 、利用波叠加法和转移矩阵法计算出一级禁带的 g 随 θ_0 的响应曲线,如图 5、6 所示。比较图 5、6 可知,波叠加法和转移矩阵法计算出一级禁带的 g 随 θ_0 的变化规律一致。当 $\theta_0 = 0$ 时,一级禁带的归一化频率的中心 $g_0 = 1$,一级禁带的归一化频率宽度 $\Delta g = 0.26$ 。

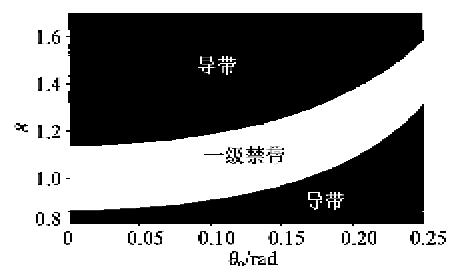
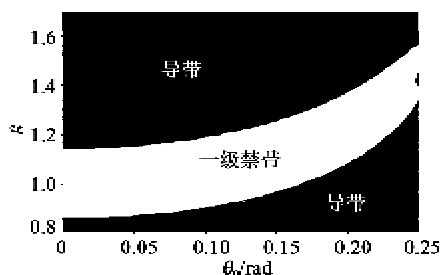


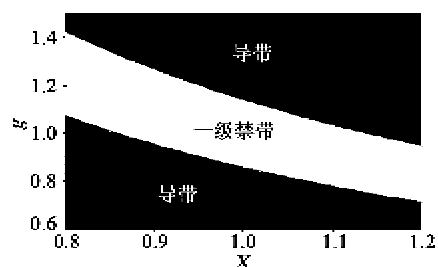
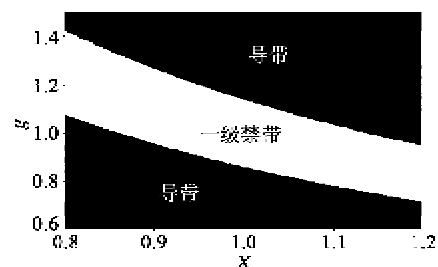
图 5 g 随 θ_0 的响应曲线(波叠加法)

图 6 g 随 θ_0 的响应曲线(转移矩阵法)

随着 θ_0 的增加一级禁带的 g_0 向高频方向移动,一级禁带的 Δg 逐渐减小。当 $\theta_0 = 0.2$ rad 时,一级禁带的 g_0 增加到 1.45,一级禁带的 Δg 减小为 0.2。

2.2 禁带随周期厚度的变化

周期厚度是指一个周期的厚度 $d = d_1 + d_2$ 。为了便于研究令 $d = X[c_1/(4f_0) + c_2/(4f_0)]$, X 为无量纲的纯数,周期厚度随 X 成正比变化。固定 $\theta_0 = 0$, 利用波叠加法和转移矩阵法计算出一级禁带的 g 随 X 的响应曲线,如图 7、8 所示。比较图 7、8 可知,波叠加法和转移矩阵法计算出一级禁带的 g 随周期厚度的变化规律是一致的。当 $X = 0.8$ 时,一级禁带的 $g_0 = 1.24$,一级禁带的 $\Delta g = 0.28$ 。随着 X 的增加一级禁带的 g_0 向低频方向移动,一级禁带的 Δg 逐渐减小。当 X 增加到 1.2 时,一级禁带的 g_0 减小到 0.83,一级禁带的 Δg 减小为 0.19。

图 7 g 随周期厚度的响应曲线(波叠加法)图 8 g 随周期厚度的响应曲线(转移矩阵法)

3 结束语

利用波的叠加原理推导出二维有限周期声子晶体中 SH 波的透射率公式,建立了一种研究二维有限周期声子晶体中 SH 波能带的新方法——波叠加

法。利用波叠加法和转移矩阵法研究了一维有限周期声子晶体中 SH 波禁带频率随入射角和周期厚度的变化特征,发现 SH 波禁带频率随入射角的增加而向高频方向移动,SH 波禁带频率随周期厚度的增加而向低频方向移动,波叠加法与转移矩阵法的结果是一致的。

波叠加法不仅具有转移矩阵法的优点,而且克服了转移矩阵法不能解释能带产生原因的缺点。因此,波叠加法是研究一维有限周期声子晶体中 SH 波能带的一种更有效的方法。

参考文献:

- [1] KUSHWAHA M S. Acoustic band-structure of periodic elastic composites[J]. Phys Rev Lett, 1993, 71(13): 2022-2025.
- [2] LUAN Piguang, YE Zhen. Acoustic waves propagation in 1D multilayered system[J]. Phys Rev E, 2001, 63(5): 066611-066622.
- [3] JESEN J S. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 266(5): 1053-1078.
- [4] WANG Gang, YU Dianlong, WEN Jihong. One-dimensional phononic crystals with locally resonant structures[J]. Physics Letters A, 2004, 327(5/6): 512-521.
- [5] MARTIN H. Small-size sonic crystals with strong attenuation bands in the audible frequency range[J]. Appl Phys Lett, 2004, 84(17): 3364-3366.
- [6] HOU Zhilin, FU Xijun, LIU Youyan. Singularity of the Bloch theorem in the fluid/solid phononic crystal[J]. Physical Review B, 2005, 71(2): 024304-024309.
- [7] BENCHABANE S, KHELIFI A, CHOUJAUL A. Interaction of wave guide and localized modes in a phononic crystal[J]. Europhysics Letters, 2006, 72(4): 570-575.
- [8] 温激鸿, 王刚, 刘耀宗. 基于集中质量法的一维声子晶体弹性波带隙计算[J]. 物理学报, 2004, 53(10): 3384-3387.
- [9] WEN Jihong, WANG Gang, LIU Yaorong. Lumped-mass method on calculation of elastic band gaps of one-dimensional phononic crystals[J]. Acta Physica Sinica, 2004, 53(10): 3384-3387.
- [9] ZHU Xuefeng, ZOU Xinye, LIANG Bin, et al. One-way mode transmission in one-dimensional phononic crystal plates[J]. J Appl Phys, 2010, 108(8): 124909-124913.

(下转第 45 页)