

压电层合曲梁大变形的精确分析

周 勇^{1,2}, 李荣华¹, 李 实¹, 欧昌杰¹

(1. 湖南理工学院 机械工程学院, 湖南 岳阳 414000; 2. 南京航空航天大学 智能材料与结构研究所, 江苏 南京 210016)

摘 要: 基于拉格朗日和欧拉框架, 该文对压电层合曲梁在力电载荷下的有限变形进行了分析。以梁曲率半径和弧切角为基本参数, 首先推导了压电曲梁在外载荷作用下的控制方程; 然后将控制方程简化为只含弧切角变量的形式; 并利用谐函数对方程进行了求解。最后以圆弧曲梁为研究对象, 利用该文的方法进行了分析, 通过与有限元法进行比较, 验证了所提方法的有效性。

关键词: 压电层合曲梁; 压电材料; 有限变形; 变曲率; 有限元

中图分类号: TM359; O342; TN384

文献标识码: A

Precise Analysis of the Finite Deformation of Curved Beams Covered with PZT Actuators

ZHOU Yong^{1,2}, LI Ronghua¹, LI Shi¹, OU Changjie¹

(1. College of Mechanical Engineering, Hunan Institute of Science & Technology, Yueyang 414000, China;

2. Institute of Smart material & Structure, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Based on Lagrangian and Eulerian description, the finite deformation is analyzed for piezoelectric laminated curved beams under mechanical and electrical static loading. Choosing the deformed radius of curvature and tangent slope angle as fundamental parameters, the governing equations of laminated curved smart beam under mechanical and electrical static loading are derived. Firstly the equilibrium equations are deduced by using the deformed angle of tangent slope as the only variant. Then the analytical solutions of laminated curved smart beams are presented using harmonic functions. Finally the static deformations of the laminated curved smart beams are calculated by this method and the finite element method. The results show the validation of the presented method.

Key words: piezoelectric laminated curved beam; piezoelectric; finite deformation; variable curvature; finite element

0 引言

随着航空航天技术的迅猛发展及微传感、微驱动等微电子器件的广泛应用, 人们对结构的响应要求越来越高。在一些高精度应用领域, 结构的微小变形就会引起结构很大的响应误差。影响结构形状的因素有机械加工误差、湿度/温度影响、材料老化、材料松弛及多种多样的外接干扰等。随着现代加工技术的不断提高, 产品生产过程也得到了完善, 系统工作时完全考虑外界不利因素的影响显然是不科学的。因此, 利用埋入式/粘贴式压电驱动单元对结构进行形状控制, 已成为相关领域的研究热点^[1-3]。

在压电形状控制领域, Koconis^[4]作了开拓性的工作。随后, 基于压电驱动器、传感器的结构形状控制吸引了越来越多的学者。Chandrashekhara 等^[5]基于高阶剪切变形理论研究了含压电驱动器梁的形状控制问题。Donthireddy 等^[6]利用有限元法对压电梁的形状控制问题进行了研究。Sun 等^[7]对表面贴有压电陶瓷作动器梁的非线性静态行为进行了理论求解。现有压电梁的形状控制多集中在直梁结构。而曲梁单元对复杂边界和工程结构均具有较好适应能力, 因此受到越来越广泛的重视^[8]。

本文提出了一种基于面内驱动的面内驱动层合压电悬臂曲梁形式微位移驱动结构。利用拉格朗日和欧拉描

收稿日期: 2015-05-08

基金项目: 湖南省高校科学研究基金资助项目(12B054)

作者简介: 周勇(1976-), 男, 湖南省岳阳市人, 副教授, 博士, 主要从事智能材料结构的研究。

述方法,我们首先推导出了压电层合曲梁在静态力电载荷作用下耦合方程,该方程以曲梁的曲率半径和弧切角为基本参数。接着,本文对该控制方程进行了简化,使方程只含有弧切角一个变量。利用谐函数法,本文获得了该简化控制方程的精确解。最后以层合圆弧曲梁为研究对象,利用本文方法分析了该梁在外载荷作用下的变形,并与商业有限元 ANSYS 的分析结果进行了比较。结果表明,本文所提方法能够对压电层合曲梁的有限变形进行有效性的分析。

1 压电曲梁控制方程

1.1 变形分析

设一细长矩形截面压电层合曲梁宽为 b , 厚为 h (见图1), 该梁由弹性材料构成且满足弹性条件。梁中心轴线无论在变形前还是变形后均位于 X - Y 平面内, 且满足如下假设:

- 1) 横截面为刚性面。
- 2) 仅考虑梁在 X - Y 面内的变形。
- 3) 梁内一点的位移幅值, 或是梁的旋转角度可以足够大。
- 4) 忽略剪切变形的影响。
- 5) 对曲梁曲率不作任何假设。

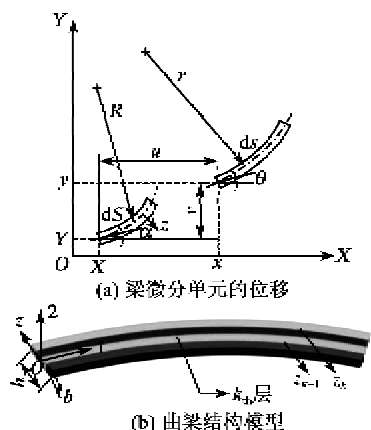


图1 压电层合曲梁

设一微分曲梁单元 dS 变形后的长为 ds , 单元上某端点的坐标由变形前的 (X, Y) 变为变形后的 (x, y) 。由图1可知, 两坐标间满足^[9]:

$$x = X + u \quad (1)$$

$$y = Y + v \quad (2)$$

式中 u, v 为梁水平和垂直位移。曲梁在点 (X, Y) 处切线与 x 轴的夹角为 α 。该点处的切线在变形后与 x 轴的夹角为 θ 。则两者之间满足:

$$ds = (1 + \epsilon_0) dS \quad (3)$$

式中 φ 为转角。

梁中心线的应变为 $\epsilon_0 = (ds - dS)/dS$, 则微分梁段变形后的弧长 ds 为

$$ds = (1 + \epsilon_0) dS \quad (4)$$

梁微分单元弧长 dS 与半径 R 满足:

$$dS = R d\alpha \quad (5)$$

式中 R 为常数时则表示圆弧, 如果为变量, 则可表示为椭圆、抛物线等其他任意形式的平面曲线。当半径已知时, 梁微分弧长 dS 在 X 和 Y 方向上的长度为

$$dX = R(\alpha) \cos \alpha d\alpha \quad (6)$$

$$dY = R(\alpha) \sin \alpha d\alpha \quad (7)$$

式中 $R(\alpha)$ 为弧上相应点切线与 x 轴夹角的函数。对式(6)、(7)积分并代入边界条件即可求得曲梁变形前的坐标。对于变形后的微分单元 ds , 相应的坐标可表示为

$$dx = r(\theta) \cos \theta d\theta \quad (8)$$

$$dy = r(\theta) \sin \theta d\theta \quad (9)$$

式中 $r(\theta)$ 为变形后相应弧的半径, θ 变形后为弧上相应点切线与 x 轴夹角。对式(8)、(9)进行积分并代入边界条件, 即可求得曲梁变形后的坐标。

对于未变形状态的梁, 距中心轴线距离为 z 处的微分弧长为

$$dS_z = [R(\alpha) + z] d\alpha \quad (10)$$

对于变形后的梁, 距中心轴线距离为 z 处的微分弧长变为

$$ds_z = [r(\theta) + z] d\theta \quad (11)$$

则根据应变的定义有

$$\epsilon_z = \frac{(ds_z - dS_z)}{dS_z} = \frac{R}{R+z} \epsilon_0 + \frac{Rz}{R+z} \frac{d\varphi}{dS} \quad (12)$$

设 $z \ll R$, 则有 z/R 为一小量, 可忽略其影响, 式(12)可简化为

$$\epsilon_z = \epsilon_0 + z \frac{d\varphi}{dS} \quad (13)$$

由式(13)可知, 当所分析的梁为细长梁时, 则可忽略应变中的非线性项。

1.2 压电层合曲梁本构方程

对一具 n 层的层合曲梁, 设基体材料为纤维增强复合材料, 其中某一层 k 的铺层角为 γ , 则其本构关系可为

$$[\sigma_z]_k = [\bar{Q}_{11}]_k [\epsilon_z]_k \quad (14)$$

式中 σ_z 为曲梁中距离中心轴线距离为 z 处一点的切向应力。将式(14)对梁横截面进行积分则可得梁内力。设正向弯矩的为使曲梁曲率增大,则其他力的正向如图2所示。

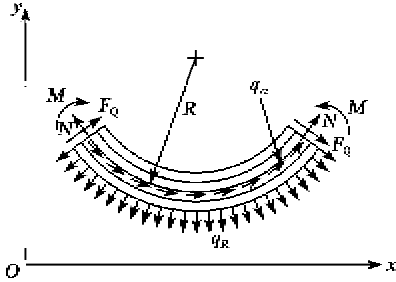


图2 曲梁正向力表示

将式(14)对梁横截面进行积分,可得轴力 N 和弯曲 M 表达式为

$$N = A_{11}\epsilon_0 + B_{11}\frac{d\varphi}{ds} \quad (15)$$

$$M = B_{11}\epsilon_0 + D_{11}\frac{d\varphi}{ds} \quad (16)$$

其中材料参数可参考文献[10]。

如果考虑压电效应的影响,则可得压电层中的应变 ϵ_z^p 为

$$\epsilon_z^p = \epsilon_0 + z\frac{d\varphi}{ds} + d_{31}E_p \quad (17)$$

式中: d_{31} 为压电应变常数; E_p 为施加在压电层中的电场。

采用文献[10]的计算方法,则由压电效应所诱导的轴力和弯矩为

$$N_p = b \sum_{k=1}^n \int_{z_k-1}^{z_k} [\bar{Q}_{11}]_k [d_{31}E_p]_k dz \quad (18)$$

$$M_p = b \sum_{k=1}^n \int_{z_k-1}^{z_k} [\bar{Q}_{11}]_k [d_{31}E_p]_k z dz \quad (19)$$

由式(15)、(16)和(18)、(19)可得压电层合梁的本构关系可表示为矩阵形式,即

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ B_{11} & D_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \frac{d\varphi}{ds} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_p \\ M_p \end{Bmatrix} \quad (20)$$

当式(18)中的 $d_{31}=0$ 时,则有 $N_p=M_p=0$ 。此时式(20)与传统材料的层合梁表达式相同。

1.3 静态平衡方程

对如图2所示的受力状态的曲梁,可得到平衡方程^[9]为

$$\frac{dN}{ds} + \frac{F_Q}{R} = -q_s \quad (21)$$

$$-\frac{N}{R} + \frac{dF_Q}{ds} = -q_R \quad (22)$$

$$\frac{dM}{ds} = F_Q \quad (23)$$

注意本构方程(20)和平衡方程(21)~(23)也可用曲梁变形后的状态进行描述:

$$\frac{dN}{ds} + \frac{F_Q}{r} = -\frac{q_s}{1+\epsilon_0} \quad (24)$$

$$-\frac{N}{r} + \frac{dF_Q}{ds} = -\frac{q_R}{1+\epsilon_0} \quad (25)$$

$$\frac{dM}{ds} = F_Q \quad (26)$$

$$N = A_{11}\epsilon_0 + B_{11}(1+\epsilon_0)\frac{d\varphi}{ds} + N_p \quad (27)$$

$$M = B_{11}\epsilon_0 + D_{11}(1+\epsilon_0)\frac{d\varphi}{ds} + M_p \quad (28)$$

为求解曲梁的变形,变形前的平衡方程及变形后的方程均需用到。式(24)~(28)表明,曲梁有限变形的复杂性主要由于 $(1+\epsilon_0)$ 项的存在,且该项导致了曲梁变形的非线性性质。

2 方程求解

考虑一压电层合悬臂梁,其跨角 $\alpha=0\sim\beta$ 。该曲梁的曲率可为任意形式。设一水平载荷 F_h 施加在该曲梁的自由端(见图3)。在 $\alpha=0$ 的固定端上,有力边界条件:

$$N(0) = -F_h \quad (29)$$

$$F_Q(0) = 0 \quad (30)$$

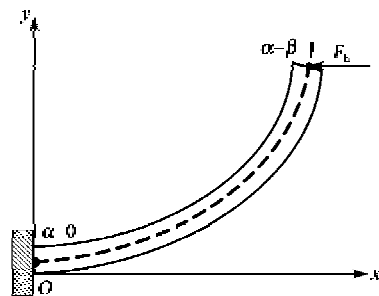


图3 受水平载荷作用的悬臂压电曲梁

采用为变形状态下的平衡方程和本构方程,且假设梁上没有分布载荷作用,及 $q_s=q_R=0$ 则式(20)~(23)可表示为

$$\frac{dN}{ds} + \frac{F_Q}{R} = 0 \quad (31)$$

$$-\frac{N}{R} + \frac{dF_Q}{ds} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{dM}{ds} = F_Q \quad (33)$$

$$N = A_{11}\epsilon_0 + B_{11}\frac{d\varphi}{dS} + N_p \quad (34)$$

$$M = B_{11}\epsilon_0 + D_{11}\frac{d\varphi}{dS} + M_p \quad (35)$$

由式(6)、(7)、(31)及(32)可得

$$\frac{dN}{d\alpha} + F_Q = 0 \quad (36)$$

$$-N + \frac{dF_Q}{d\alpha} = 0 \quad (37)$$

则式(36)、(37)的解为

$$N = A_1 \cos \alpha + A_2 \sin \alpha \quad (38)$$

$$F_Q = -A_2 \cos \alpha + A_1 \sin \alpha \quad (39)$$

式中 A_1 和 A_2 为常数,可由梁的里边界条件确定。

根据式(29)、(30)可求得轴力和剪力为

$$N = -F_h \cos \alpha \quad (40)$$

$$F_Q = -F_h \sin \alpha \quad (41)$$

对式(33)进行积分并利用悬臂曲梁起始端的力边界条件可得

$$M = -\int_0^\alpha R(\omega) F_h \sin \omega d\omega + M_0 \quad (42)$$

式中 M_0 为固定端处的梁弯矩。

另外,通过求解式(34)和(35)可得

$$\epsilon_0 = -\frac{1}{\Delta} (B_{11} M - D_{11} N - B_{11} M_p + D_{11} N_p) \quad (43)$$

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{1}{\Delta} (A_{11} M - B_{11} N - A_{11} M_p + B_{11} N_p) \quad (44)$$

式中 $\Delta = A_{11} D_{11} - B_{11}^2$ 。式(43)表明,压电效应诱导的弯矩 M_p 在一定的材料特性条件下,也能引起梁中心轴线的拉伸应变。对式(44)进行积分可得

$$\varphi = \frac{1}{\Delta} \int_0^\alpha [A_{11} M + B_{11} F_h \cos \omega - A_{11} M_p + B_{11} N_p] R(\omega) d\omega + \varphi_0 \quad (45)$$

式中 φ_0 为常数,可由梁一端的位移边界条件确定。对于悬臂梁可知,当 $\alpha=0$ 时, $\varphi_0=0$ 。

由式(3)、(4)和(8)、(9)可知,梁变形后中心轴线上点的坐标可表示为

$$x = \int_0^\alpha (1 + \epsilon_0) \cos(\omega + \varphi) R(\omega) d\omega + x_0 \quad (46)$$

$$y = \int_0^\alpha (1 + \epsilon_0) \sin(\omega + \varphi) R(\omega) d\omega + y_0 \quad (47)$$

式中 x_0 和 y_0 可根据梁边界条件确定,对于悬臂梁,当 $\alpha=0$ 时有 $x=0$ 和 $y=0$ 。当通过式(43)和(45)计算出 ϵ_0 和 φ 后,则可根据式(46)、(47)计算出梁变形后的坐标。由此可知,要获得梁的变形,无需直

接计算梁的位移^[9]。通过式(3)可求得变形后梁中心轴线上一点的倾角为

$$\theta = \alpha + \frac{1}{\Delta} \int_0^\alpha [A_{11} M + B_{11} F_h \cos \omega - A_{11} M_p + B_{11} N_p] R(\omega) d\omega + \varphi_0 \quad (48)$$

在获得梁上点在变形前、后的坐标后,可求得梁的位移为

$$\begin{cases} u = \int_0^\alpha (1 + \epsilon_0) \cos(\omega + \varphi) R(\omega) d\omega - \int_0^\alpha R(\omega) \cos \omega d\omega \\ v = \int_0^\alpha (1 + \epsilon_0) \sin(\omega + \varphi) R(\omega) d\omega - \int_0^\alpha R(\omega) \sin \omega d\omega \end{cases} \quad (49)$$

3 算例分析

对如图 4 所示的悬臂压电层合梁,设梁基体材料为纤维增强复合材料且对称铺设,梁为一段跨度为 β 的圆弧,圆弧半径为常数,即 $R(\alpha) = R_0$ 。对于该梁有 $B_{11} = 0$ 。根据式(48)有

$$\varphi = \frac{R_0}{\Delta} \{ A_{11} F_h R_0 [\sin \alpha \cos \beta \alpha] - A_{11} M_p \alpha \} \quad (50)$$

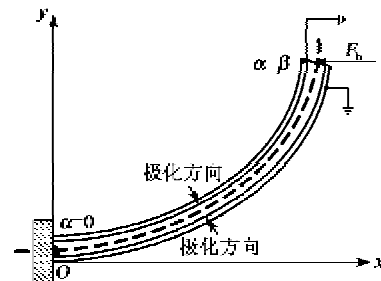


图 4 跨度为 60° 的压电层合曲梁

由式(49)可求得外载荷作用下的圆弧形悬臂梁位移表达式为

$$u = \int_0^\alpha \left\{ 1 - \frac{1}{\Delta} [D_{11} F_h \cos \omega + D_{11} N_p] \right\} \cos(\omega + \varphi) R_0 d\omega - R_0 \sin \alpha \quad (51)$$

$$v = \int_0^\alpha \left\{ 1 - \frac{1}{\Delta} [D_{11} F_h \cos \omega + D_{11} N_p] \right\} \sin(\omega + \varphi) R_0 d\omega + R_0 \cos \alpha \quad (52)$$

为验证本文所提计算方法的有效性,本文对悬臂式 3 层压电层合梁进行了分析(见图 4)。该梁基体层铺设角 90°,厚为 2 mm,其材料常数如表 1 所示。基体材料层上、下表面铺设了各向同性压电材料层,厚为 1 mm,其材料常数如表 1 所示。设梁的跨度为 60°,半径为 100 mm。

表1 材料特性常数

	PZT	基质材料
弹性模量 Y_1/GPa	63.0	132
弹性模量 Y_2/GPa	63.0	13.2
剪切模量 G_{12}/GPa	—	5.65
泊松比 μ_{12}	0.3	0.3
$d_{31}/(\text{m/V})$	-450×10^{-12}	—
$g_{31}/(\text{V} \cdot \text{m/N})$	11.8×10^{-6}	—
介电常数	993.6	—

图5为压电层合曲梁在 $1.0 \times 10^4 \text{ V}$ 电压作用下的位移曲线。由图可知,位移在考虑非线性效应和不考虑非线性效应时的差值约在 10%。本文理论解和 ANSYS 有限元大变形条件下的数值解相吻合,表明本文所提方法的有效性。

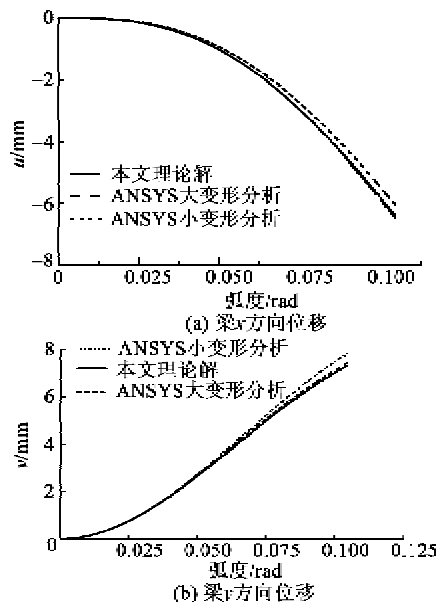


图5 梁在电压载荷作用下的位移

图6为压电层合曲梁在 100 V 电压载荷和 1 000 N 水平集中力载荷共同作用下的位移曲线。由图可知,由于两种载荷的叠加,使梁位移较大。位移在考虑非线性效应和不考虑非线性效应时的差值最大时要大于 36%。本文理论解和 ANSYS 有限

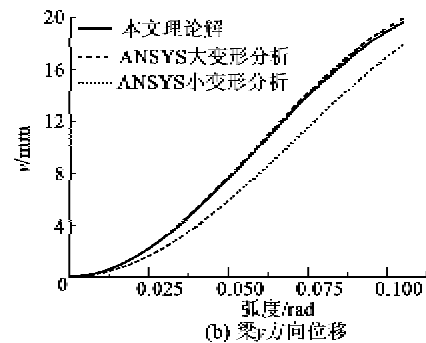
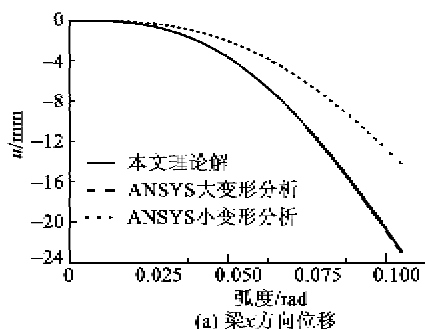


图6 梁在电压和力载荷作用下的位移

元大变形条件下的数值解仍吻合较好,表明本文所提方法能较好的对曲梁进行分析。

4 结束语

本文对压电层合曲梁进行了精确分析。基于 Lagrangian 和 Eulerian 的描述,以曲梁的曲率半径和弧切角为基本参数,本文首先推导了压电曲梁在静态电载荷和机械载荷作用下的平衡方程。利用弧长与弧跨角的关系,本文对平衡方程进行了简化,并利用谱函数对简化后的控制方程进行了精确求解。最后以 3 层圆弧压电曲梁为研究对象,利用本文方法对该曲梁在电载荷和集中力载荷作用下的变形,并与有限元法的大、小变形模式进行了比较。结果验证了本文所提方法的有效性。

参考文献:

- [1] 王剑,赵国忠,王悦东,等.压电曲梁单元及其形状控制[J].计算力学学报,2011,28(4):641-646.
WANG Jian, ZHAO Guozhong, WANG Yuedong, et al. Shape control of piezoelectric structures by curved beam actuators[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(4): 641-646.
- [2] ZHANG Shunqi, LI Yaxi, RÜDIGER S. Active shape and vibration control for piezoelectric bonded composite structures using various geometric nonlinearities[J]. Composite Structures, 2015, 122(4): 239-249.
- [3] SCHOEFTNER J, BUCHBERGER G, IRSCHIK H. Static and dynamic shape control of slender beams by piezoelectric actuation and resistive electrodes[J]. Composite Structures, 2014, 111(3): 66-74.
- [4] KOCONIS D B, KOLLAR L P, SPRINGER G S. Shape control of composite plates and shells with embedded actuators. 1: Voltages specified[J]. Journal of Composite Materials, 1994, 28(5): 415-458.
- [5] CHANDRASHEKHARA K, VARADARAJAN S. Adaptive shape control of composite beams with piezo-

- lectric actuators[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1997, 8(2): 112-124.
- [6] DONTTHIREDDY P, CHANDRASHEKHARA K. Modeling and shape control of composite beams with embedded piezoelectric actuators[J]. Composite Structures, 1996, 35(2): 237-244.
- [7] SUN D, TONG L, WANG D. An incremental algorithm for static shape control of smart structures with non-linear piezoelectric actuators[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41(9/10): 2277-2292.
- [8] LUO Quantian, TONG Liyong. Design and testing for shape control of piezoelectric structures using topology optimization[J]. Engineering Structures, 2015, 97(15): 90-104.
- [9] LIN K C, LIN C W. Finite deformation of 2-D laminated curved beams with variable curvatures[J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2011 (46): 1293-1304.
- [10] BARBERO E J. Finite element analysis of composite materials[M]. New York: CRC Press, 2007.
- (上接第 83 页)
- [11] CHOI S B, HAN S S, HAN Y M, et al. A magnification device for precision mechanisms featuring piezo-actuators and flexure hinges: Design and experimental validation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(9): 1184-1198.
- [12] TIAN Y, SHIRINZADEH B, ZHANG D, et al. Development and dynamic modelling of a flexure-based Scott-Russell mechanism for nano-manipulation[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23(3): 957-978.
- [13] CULLIN M, PETERSEN T, LOBONTIU N, et al. Experimental determination of planar compliance values of flexures Exp determ of planar compliance vals [J]. Measurement, 2014(58): 301-309.
- [14] 何兵怀. 多点调平系统的研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2014.
- [15] 陶溢, 潘存云. 指向机构微调平台的结构设计与分析[J]. 现代制造工程, 2006(9): 102-105.
- TAO Yi, PAN Cunyun. Design and analysis of the micro-adjusting platform on directing mechanism [J]. Modern Manufacturing Engineering, 2006 (9): 102-105.
- [16] 秦海辰, 尹国平. 压电陶瓷晶体迟滞特性的本构关系研究[J]. 中国机械工程, 2014, 25(15): 2059-2064.
- QING Haichen, YIN Guoping. Research on hysteresis constitutive relation in piezoceramic crystals[J]. China Mechanical Engineering, 2014, 25(15): 2059-2064.
- (上接第 87 页)
- [5] 周明刚, 周小强, 陈源, 等. 周期阻尼结构低频带隙的研究与应用[J]. 拖拉机与农用运输车, 2012, 39(1): 26-29.
- ZHOU Minggang, ZHOU Xiaoqiang, CHEN Yuan, et al. Research and application of periodic damping structure low frequency band gap [J]. Tractor & Farm Transporter, 2012, 39(1): 26-29.
- [6] 姚熊亮, 计方, 钱德进, 等. 偏心阻振质量阻抑振动波传递特性研究[J]. 振动与冲击, 2010, 29(1): 48-52.
- YAO Xiongliang, JI Fang, QIAN Dejin, et al. Characteristics of eccentric blocking masses attenuating vibration wave propagation [J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(1): 48-52.
- [7] 申华, 温华兵, 陆金铭, 等. 空心方钢阻振质量结构的阻振效果研究[J]. 中国造船, 2013, 54(1): 101-107.
- SHEN Hua, WEN Huabing, LU Jinming, et al. Research on the vibration isolation performances of hollow-square-steel vibration isolation mass structure[J]. Shipbuilding of China, 2010, 29(1): 48-52.
- [8] AUMJAUD P, SMITH C W, EVANS K E. A novel viscoelastic damping treatment for honeycomb sandwich structures[J]. Composite Structures, 2015, 119(1): 322-332.
- [9] BOUCHER M A, SMITH C W, SCARPA F, et al. Effective topologies for vibration damping inserts in honeycomb structures[J]. Composite Structures, 2013, 106(10): 1-14.
- [10] ZHOU X Q, YU D Y, SHAO X Y, et al. Asymptotic analysis on flexural dynamic characteristics for a sandwich plate with periodically perforated viscoelastic damping material core [J]. Composite Structures, 2015, 119(1): 487-504.