

# 梯形梁压电俘能器的特性研究

谭杨康,高世桥,张广义

(北京理工大学 爆炸科学与技术国家重点实验室,北京 100081)

**摘要:**传统悬臂梁压电俘能器通常采用矩形梁结构,其压电片宽度为定值,对于压电片的利用效率有限。该文设计了一种梯形梁结构,将悬臂梁及其上附着的压电层设计为梯形,压电片宽度沿梁长方向逐渐变窄,并针对梯形梁结构的压电俘能器进行理论研究、仿真计算与实验分析,同时与传统矩形梁俘能器进行了对比。结果表明,同样的谐振状态下,梯形压电片中应力分布比矩形压电片中更均匀,且梯形梁压电俘能器具有更高的电压输出。

**关键词:**压电俘能器;矩形悬臂梁;梯形悬臂梁;等效刚度;应力分布;输出电压

中图分类号:TN384

文献标识码:A

## Study on the Characteristics of Trapezoidal Cantilever Piezoelectric Energy Harvester

TAN Yangkang, GAO Shiqiao, ZHANG Guangyi

(State Key Lab. of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** The rectangular cantilever structure is widely used in conventional cantilever piezoelectric energy harvester, due to the width of the piezoelectric plate is constant, the utilization efficiency of the piezoelectric material is limited. A trapezoidal cantilever structure is designed in this paper, in which the cantilever and the piezoelectric layer adhering to it is designed to be trapezoidal. The width of piezoelectric layer is gradually narrowed along the beam length direction. The designed structure is analyzed by the means of theoretical analysis, simulation and experiment. And at the same time a comparison between rectangular cantilever piezoelectric energy harvester and trapezoidal cantilever piezoelectric energy harvester has been performed. The result shows that under resonant state, the stress distribution in trapezoidal piezoelectric layer is more uniform than that in the rectangular piezoelectric layer and trapezoidal cantilever piezoelectric energy harvester has a higher output voltage.

**Key words:** piezoelectric energy harvester; rectangular cantilever; trapezoidal cantilever; equivalent stiffness; stress distribution; output voltage

### 0 引言

相对于传统化学电池的种种缺陷,基于压电材料制成的俘能装置由于其结构简单、不发热、无电磁干扰、无污染和易于实现结构的微小化及集成化等优点,成为了研究热点<sup>[1-4]</sup>。传统悬臂梁压电俘能器所采用的压电片通常为矩形,压电片宽度为定值。本文设计了一种梯形梁结构,将压电片设计为梯形,宽度沿梁长方向递减。这样的结构可使在悬臂梁同样的弯曲程度下,压电片上的应力增大,从而提高俘能器的输出。针对梯形梁压电俘能器的特性,本文进行了

深入探究。从理论、仿真与实验三个角度对比了梯形梁压电俘能器与矩形梁压电俘能器之间的差异。

### 1 梯形梁压电俘能器结构

本文设计的梯形梁压电俘能器,基本结构仍采用将压电片粘附在金属基底制成的悬臂梁上的形式<sup>[5-6]</sup>,如图1所示。

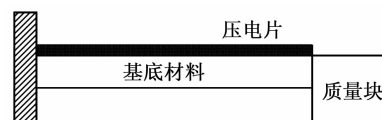


图1 悬臂梁压电俘能器结构示意图

收稿日期:2015-09-16

基金项目:国家“八六三”计划基金资助项目(SS2013AA011104)

作者简介:谭杨康(1991-),男,湖北荆门人,硕士生,主要从事俘能器及传感器方面的研究。高世桥(1961-),男,北京人,教授,主要从事微机电技术,高速条件下的控制技术研究。

悬臂梁结构由沿厚度方向极化的压电片和一层金属片组成,末端附加一个集中质量块,根部固定。由于压电陶瓷本身的脆性,在应用范围上受到很大限制,所以将其和金属材料复合在一起使用,克服其缺点。末端的质量块可以调节结构的固有频率和增大输出电压。在压电片上、下面覆盖电极。电极通过导线与负载相连,形成一个回路。当结构在外界载荷激励下发生振动时,附着于悬臂梁上的压电材料随着基底一起产生形变。由于压电效应,压电片上、下表面间将产生电势差,即可形成能量采集装置,为微小型器件供能<sup>[7-8]</sup>。

矩形梁结构与梯形梁结构的不同之处是悬臂梁的宽度,梯形梁的长边与矩形梁的宽度相等,梯形梁宽沿梁长方向逐渐减小,两种结构尺寸对比如图 2 所示, $L$  为压电片长度, $b_1$  为梯形结构最宽处宽度(与矩形梁宽度相等), $b_2$  为梯形结构最窄处宽度。

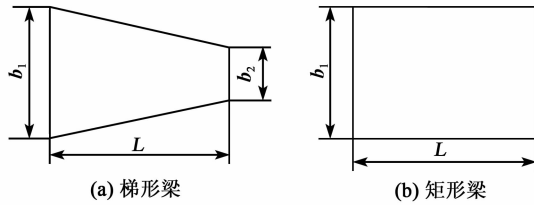


图 2 两种梁形状示意图

## 2 梯形梁与常规矩形梁结构的理论研究

对于压电材料,当其内部应力、应变状态发生变化时,材料内部会发生极化现象,压电材料中力学量与电学量之间存在的关系即压电材料的本构方程,称为压电方程<sup>[9-11]</sup>。悬臂梁压电俘能器中,压电材料处于第一类边界条件,即机械自由、电学短路,此时压电方程的形式为

$$\begin{pmatrix} S \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^E & d^t \\ d & \epsilon^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ E \end{pmatrix} \quad (1)$$

式中: $S$  为机械应变; $T$  为机械应力; $D$  为电位移; $E$  为电场强度; $s^E$  为弹性柔顺常数矩阵; $d$  为压电应变常数矩阵; $d^t$  为  $d$  的转置; $\epsilon^T$  为介电常数矩阵。当悬臂梁受到激励发生弯曲振动时,压电材料处在  $d_{31}$  振动模式。在此模式下,压电材料的极化方向与其产生的电场方向相同,均为 3 方向,同时主要的机械应力和应变为 1 方向,故压电方程简化为

$$\begin{cases} S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3 \\ D_3 = d_{31} T_1 + \epsilon_{33}^T E_3 \end{cases} \quad (2)$$

由式(2)中第一式可进一步求出此时压电材料中的

机械应力为

$$T_1 = Y_1 S_1 - \frac{d_{31}}{s_{11}^E} E_3 \quad (3)$$

式中: $Y_1$  为压电材料杨氏模量; $S_1$  为机械应变; $d_{31}$  为压电常数; $s_{11}^E$  为弹性柔顺常数。与此同时,对于梯形梁和矩形梁两种悬臂梁结构,均可简化为复合悬臂梁端部受载荷作用的简单力学模型,如图 3 所示。

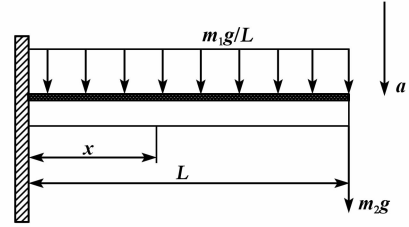


图 3 简化的力学模型

图 3 中, $m_1$  和  $m_2$  分别为复合梁整体和质量块的质量, $L$  为梁长,整个结构受到加速度为  $a$  的载荷作用, $g$  为重力加速度。取与固支端距离为  $x$  的截面,分析该截面上的受力状态,此截面上的弯矩为

$$M = m_2(g-a)(L-x) + \frac{1}{2} \frac{m_1(g-a)}{L} (L-x)^2 \quad (4)$$

进一步分析图 3,其截面细节如图 4 所示。图中,截面整体高为  $H$ ,基底材料高为  $h$ ,压电层高为  $\delta$ , $y$  轴为整个悬臂梁结构的中性层,与压电层距离为  $e$ ,悬臂梁宽为  $b$ 。

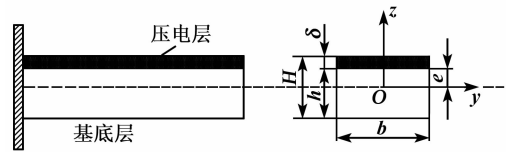


图 4 截面示意图

复合梁在受到外力作用时,产生变形。假设原为平面的复合梁的横截面变形后仍保持为平面,则基底材料中的纤维应力可写为

$$T_s = Y_s \frac{z}{\rho} \quad (5)$$

式中: $Y_s$  为基底材料的杨氏模量; $z$  为弯曲过程中中性层沿  $z$  方向发生的位移; $\rho$  为中性层的曲率半径。同时由式(3)及平面假设可得压电材料中的纤维应力

$$T_p = Y_p \frac{z}{\rho} - \frac{d_{31}}{s_{11}^E} E_3 \quad (6)$$

式中: $Y_p$  为压电材料 1 方向(即悬臂梁的轴向)上的

杨氏模量;  $E_3$  为 3 方向(即悬臂梁的法向)上的电场强度。

1) 分析矩形梁的情况,由悬臂梁  $x$  方向上的受力平衡可得

$$\sum F_x = \int_{-(h-e)}^e T_s b_1 dz + \int_e^{e+\delta} T_p b_1 dz = 0 \quad (7)$$

由式(5)~(7)计算可确定此时复合梁中性面的位置(外电路处于开路状态即  $E_3=0$ ),即

$$e = \frac{Y_s h^2 - Y_p \delta^2}{2(\delta Y_p + h Y_s)} \quad (8)$$

由式(4)~(8)可得,在所选取的截面  $x$  处,复合梁内部的弯矩与外力的弯矩相等,则有

$$M = \int_A z T dA = b_1 \int_{-(h-e)}^e Y_s \frac{z^2}{\rho} dz + b_1 \int_e^{e+\delta} \left( Y_p \frac{z^2}{\rho} - \frac{d_{31}}{s_{11}^E} E_3 z \right) dz \quad (9)$$

即

$$\frac{1}{\rho} = 3M / \{ b_1 [Y_p (\delta^3 + 3\delta^2 e + 3\delta e^2) + Y_s (h^3 - 3h^2 e + 3he^2)] \} \quad (10)$$

根据几何关系  $\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ , 可将式(10)化成一般的梁弯曲方程形式为

$$YI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = M \quad (11)$$

式中:  $w$  为变形挠度(中性面);  $YI$  为复合梁的弯曲刚度,  $Y$  为等效弹性模量,  $I$  为梁截面的等效二阶矩。对于矩形梁,等效刚度为

$$YI = \{ b_1 [Y_p (\delta^3 + 3\delta^2 e + 3\delta e^2) + Y_s (h^3 - 3h^2 e + 3he^2)] \} / 3 \quad (12)$$

2) 推导梯形梁的情形,对于最大宽度为  $b_1$ , 最小宽度为  $b_2$  的梯形梁,设与固支端间距为  $x$  的截面宽为  $b(x)$ ,定义截面变化率  $\alpha = \frac{b_1 - b_2}{L}$ , 可得

$$b(x) = b_1 - \alpha x \quad (13)$$

于是得到梯形梁的等效刚度为

$$YI(x) = \{ (b_1 - \alpha x) [Y_p (\delta^3 + 3\delta^2 e + 3\delta e^2) + Y_s (h^3 - 3h^2 e + 3he^2)] \} / 3 \quad (14)$$

由式(12)、(14)可知,当悬臂梁自由端附加的质量块质量相等时,不同于矩形梁,梯形梁由于截面大小随梁长变化,其刚度也随之变化,且越远离固支端刚度越低。那么,在同样大小的振动激励作用下,由

于刚度的变化,梯形梁中越远离固支端的截面挠度越大,相应地,梯形梁上附着的压电片的形变也就越大。因此,在同样的激励作用下采用梯形梁的悬臂梁压电俘能器将能产生更高的电输出。

### 3 基于 ANSYS 的仿真分析

通过有限元仿真软件 ANSYS,对两种形状的悬臂梁压电俘能器进行了谐响应分析。对结构施加峰值相等的正弦加速度激励<sup>[12]</sup>,并对两种梁在不同激励频率下的应力分布及输出电压进行对比。首先对两种结构进行建模,如图 5、6 所示,

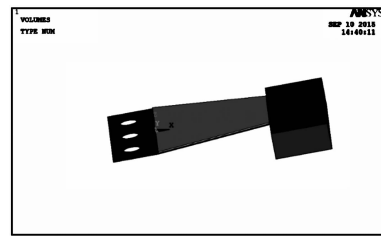


图5 梯形梁

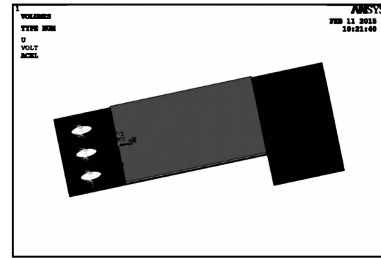


图6 矩形梁

梯形压电片最宽处尺寸为 25 mm,最窄处尺寸为 15 mm,长为 20 mm,矩形压电片宽为 25 mm,长为 20 mm。两种结构中自由端附着的质量块相同,图中 3 个圆孔为将结构固定于激振台上的螺孔。在螺孔上施加固定约束,对结构进行谐响应分析,得到结构中等效应力分布,如图 7、8 所示。

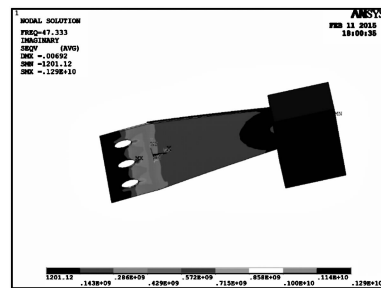


图7 梯形梁结构应力分布

分析结果显示,两种形状的梁在载荷激励下等

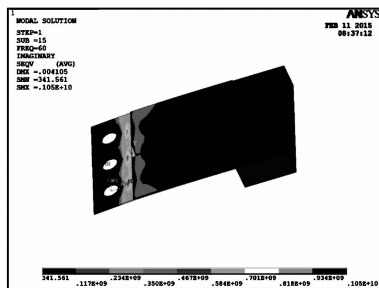


图8 矩形梁结构应力分布

效应力的最大值都出现在固支端,且梯形梁中的最大应力大于矩形梁中的最大应力。

为进一步对比两种结构的应力分布差别,特定义一个指标  $\Delta$ ,来反映其应力分布的均匀程度,指标  $\Delta$  的定义如下:

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\sigma_i - \bar{\sigma})^2}{n \cdot \bar{\sigma}^2}} \quad (15)$$

式中:  $\sigma_i$  为各个点的等效应力值;  $\bar{\sigma}$  为所选取的全部点等效应力的平均值;  $n$  为所选取的点的数量。

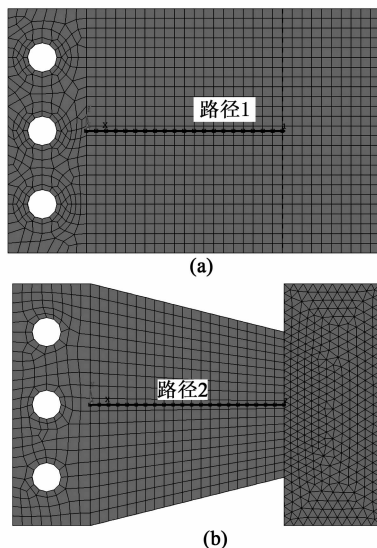


图9 选取路径

$\Delta$  值的计算方法类似于统计学中的标准差,能反映出结构中应力分布的均匀度情况。梯形梁结构的  $\Delta$  值为 0.206 8,而矩形梁结构的  $\Delta$  值为 0.319 6,由此可得梯形梁的  $\Delta$  值较小,说明梯形梁中应力的分布较均匀,而从图 8 可知矩形梁中应力相对集中于固支端附近。由此可知,梯形梁结构中的压电片

对应力的利用率更高,能够产生更高的输出。

对两种形状的俘能器输出电压的仿真结果进行比较,如图 10 所示。

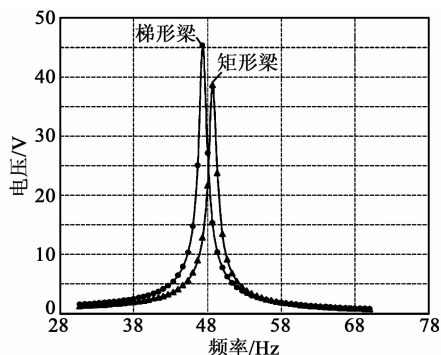


图10 仿真电压数据

由图 10 可知,梯形梁与矩形梁除了固有频率略有差别外,最大的差别在于输出电压。仿真结果显示,共振状态下梯形梁能输出的最大电压为 45.40 V,出现在频率 47.33 Hz 处,共振状态下矩形梁的最大输出电压为 38.68 V,出现在频率 48.67 Hz 处。仿真结果表明,共振状态下梯形梁的输出电压高于矩形梁的输出电压,梯形压电片对复合梁弯曲振动过程中的变形利用率更大。

#### 4 两种结构的实验研究

为了进一步研究梯形梁结构与矩形梁结构的俘能器输出性能,对两种结构都进行了加工。加工完成的两种结构如图 11 所示。

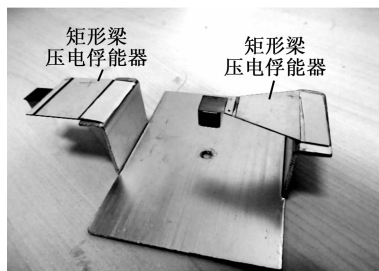


图11 加工完成后的两种梁结构

在实验室条件下对两者的输出性能进行了测试及对比。测试系统如图 12 所示。



图12 测试系统

测试系统工作流程为:首先由信号发生器发出正弦信号,经过放大器后输出到激振台上时,激振台上产生简谐振动,将受试结构和加速度传感器一同固定在激振台上随之一起振动,通过示波器接收加速度传感器信号,观测振动的加速度,通过动态信号分析仪接收俘能器的输出电压。

通过调节信号发生器,使其发出不同频率的正弦信号后,再调节功率放大器使振动的加速度保持在  $9 \text{ m/s}^2$ ,在不同的激励频率下对两种结构的俘能器所产生的输出电压进行记录,频率范围为  $30 \sim 70 \text{ Hz}$ ,测试结果如图 13 所示。

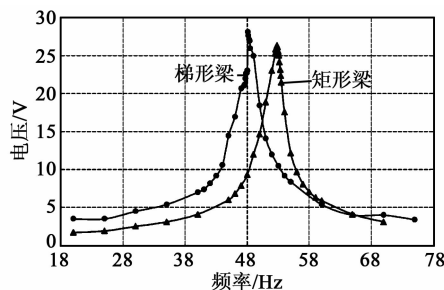


图 13 测试结果曲线

由图 13 可知,梯形梁结构的固有频率约为  $48.1 \text{ Hz}$ ,此时产生的电压为  $29.2 \text{ V}$ ,而矩形梁的固有频率约为  $52.7 \text{ Hz}$ ,此时产生的电压为  $26.2 \text{ V}$ 。虽然实际测试结果中的输出电压与理想状态下的数值仿真结果相比偏小,但仍可看出,当两种结果同样处于谐振状态下时,梯形梁俘能器所产生的电压输出比矩形梁高。

## 5 结束语

本文提出一种与传统矩形梁结构不同的梯形梁俘能器结构,并通过理论推导,数值仿真与实验测试相结合的手段对两种梁结构的压电俘能器性能进行了分析对比。结果表明,当同样处在谐振状态下时,梯形梁压电俘能器与矩形梁压电俘能器相比,压电片上的应力分布更均匀,不会发生过大的应力集中,同时还能输出更高的电压。

## 参考文献:

- [1] 袁江波,谢涛,单小彪,等.压电俘能技术研究现状综述[J].振动与冲击,2009,28(10):36-41.  
YUAN Jiangbo, XIE Tao, SHAN Xiaobiao, et al. Review of research on piezoelectric technology[J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(10): 36-41.
- [2] 薛欢,胡元太,胡洪平,等.弱振动环境中的压电俘能器[J].华中科技大学学报(自然科学版),2008,36(3):54-57.  
XUE Huan, HU Yuantai, HU Hongping, et al. Piezoelectric energy harvester under weak vibration environment[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2008, 36(3): 54-57.
- [3] 王志彬.固支梁压电俘能器宽频规划及其仿真与实验研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2010.
- [4] 程光明,庞建志,唐可洪,等.压电陶瓷发电能力测试系统的研制[J].吉林大学学报(工学版),2007,37(2):367-371.  
CHENG Guangming, PANG Jianzhi, TANG Kehong, et al. Development of measuring system for electricity generating capacity of piezoelectric ceramics[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2007, 37(2): 367-371.
- [5] 朱波.基于压电材料的环境振动能量采集[D].南京:南京航空航天大学,2013.
- [6] JUNWU K, JINHAO Q, KEHONG T, et al. Modeling and simulation of piezoelectric composite diaphragms for energy harvesting[J]. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 2009, 30(1): 95-106.
- [7] 卢有为,单小彪,袁江波,等.悬臂梁压电俘能器的建模研究[J].机械设计与制造,2010(5):118-120.  
LU Youwei, SHAN Xiaobiao, YUAN Jiangbo, et al. Modeling of piezoelectric cantilever energy harvesting[J]. Machinery Design and Manufacture, 2010(5): 118-120.
- [8] 陈红.悬臂梁式压电俘能器若干关键技术研究[D].南京:南京邮电大学,2014.
- [9] 孙慷,张福学.压电学[M].北京:国防工业出版社,1984.
- [10] 许湿寰.铁电与压电材料[M].北京:科学出版社,1978:1-80.
- [11] ROUNDY S, WRIGHT P K. A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics[J]. Smart Materials and Structures, 2004, 13(5): 1131.
- [12] 蔡华通,高世桥,李平,等.压电-电磁复合式俘能器的设计与实验研究[J].压电与声光,2015,37(2):248-253.  
CAI Huatong, GAO Shiqiao, LI Ping, et al. Design and experimental study of hybrid piezoelectric and electromagnetic harvester[J]. Piezoelectrics & Acousto-optics, 2015, 37(2): 248-253.