

# 半球谐振陀螺静态误差分析与补偿

李 灿,汪立新,田 颖

(火箭军工程大学,陕西 西安 710025)

**摘 要:**半球谐振陀螺由于特有的优势而具有广阔的应用前景,但由于加工工艺和研究水平的限制,其测量精度有待提高,该文针对半球谐振陀螺的静态误差,分析了加速度对半球谐振陀螺的影响,选取了静态误差补偿模型,设计了标定实验中的方位定向,推导了个误差系数的计算公式,最后通过实验表明了标定补偿的有效性,使陀螺的输出系统误差减小了1个数量级。

**关键词:**半球谐振陀螺;加速度;静态误差;标定实验;误差补偿

**中图分类号:**V241.5 **文献标识码:**A

## Static Error Analysis and Compensation of HRG

LI Can, WANG Lixin, TIAN Ying

(Rocket Force Engineering University, Xi'an 710025, China)

**Abstract:** HRG has wide application prospects due to its special advantages, but because of the restrictions of the processing technology and research level, the measurement accuracy of HRG remains to be improved to a higher level. Aimed at the static error of HRG, this essay analyzes the influence of accelerate on HRG. The error compensation model is chosen, and the azimuthal orientation of calibration test is designed. The computational formula of error coefficient is derivated. At last, the effectiveness of the calibration compensation is verified experimentally, and the result shows that the system error decreases by one order of magnitude.

**Key words:** HRG; accelerate; static error; calibration experiment; error compensation

### 0 引言

半球谐振陀螺相对于其他陀螺<sup>[1-2]</sup>具有寿命长,个体小,质量小,功耗低,抗辐射,启动时间短,无磨损及长期稳定性好等优点<sup>[3]</sup>,因此半球陀螺在卫星、导弹、定向钻井等领域应用广泛。由于国内对半球陀螺的研究起步较晚及生产工艺水平的限制,目前,国内生产的半球陀螺的精度不够。因此,基于国内现有的研究和生产水平,利用建模补偿的方式提高陀螺精度非常必要。

国内对半球陀螺输出信号的研究主要集中在随机误差<sup>[4]</sup>、温度漂移误差<sup>[5]</sup>、生产工艺<sup>[6]</sup>、半球谐振陀螺平台<sup>[7]</sup>等方面,加速度引起的半球谐振陀螺静态误差也有一些研究,但未形成公认的定论。本文从不同角度分析了加速度的影响,而后使用标定的方式对静态误差进行了补偿,在半球谐振陀螺静态误差方面做一些探讨性的工作。

### 1 理想情况下半球陀螺输出

#### 1.1 陀螺径向运动方程的建立

基于布勃诺夫-加廖尔金的假设,谐振子边沿的径向运动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 4\Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \eta^2 \left( \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \eta^2 \xi \left[ \frac{\partial^6}{\partial \varphi^6} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) + 2 \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] = F(\varphi, t) \quad (1)$$

式中: $w(t)$ 为在角位置 $\varphi$ 处的径向位移; $\Omega$ 为基座相对于惯性空间的转动角速度; $\xi$ 为阻尼系数; $\eta^2 = \frac{EI}{\rho s R^4}$ 为取决于谐振子结构的常量, $E$ 为杨氏弹性模量, $\rho$ 为材料密度, $s$ 为横截面积, $I$ 为横截面相对于弯曲轴的惯性矩, $R$ 为半径; $F(\varphi, t)$ 为谐振子任意质点的受力。

收稿日期:2015-08-01

作者简介:李灿(1989-),男,山东兖州人,硕士生,主要从事惯性系统及测试方面的工作。E-mail: 15339030629@163.com。

在力反馈模式下半球谐振陀螺的激励方式为双点激励,记主激励电极的幅值为  $F_A$ ,反馈激励电极的幅值为  $F_B$ ,则<sup>[8]</sup>

$$F(\varphi, t) = F_A \cos \lambda t \cos 2\varphi + F_B \cos \lambda t \cos 2(\varphi - 45) \quad (2)$$

## 1.2 径向运动方程的求解

将径向位移  $w(\varphi, t)$  在  $0^\circ$  和  $45^\circ$  电极轴上分解可得

$$w(\varphi, t) = p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi \quad (3)$$

式中:  $p(t)$  为  $0^\circ$  电极轴上的分量;  $q(t)$  为  $45^\circ$  电极轴上的分量。将式(2)、(3)代入式(1)可得

$$\begin{aligned} & \text{二次项} \quad -5p''(t) \cos 2\varphi - 5q''(t) \sin 2\varphi \\ & \text{耦合项} \quad +8\Omega(q'(t) \cos 2\varphi - p'(t) \sin 2\varphi) \\ & \text{一次项} \quad -36\eta^2 \xi(p'(t) \cos 2\varphi + q'(t) \sin 2\varphi) \\ & \text{零次项} \quad -36\eta^2(p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi) \\ & \text{电磁力} \quad = F_A \cos \lambda t \cos 2\varphi + F_B \cos \lambda t \cos 2(\varphi - 45) \end{aligned} \quad (4)$$

利用三角函数在  $[-\pi, \pi]$  上的正交性,分别使用  $\sin 2\varphi$ 、 $\cos 2\varphi$  对式(4)作内积,再进行简化后得

$$\begin{cases} q''(t) + \omega_0^2 \xi q'(t) + \omega_0^2 q(t) = -\frac{1}{5} F_B \cos \omega_0 t \\ p''(t) + \omega_0^2 \xi p'(t) + \omega_0^2 p(t) = -\frac{1}{5} F_A \cos \omega_0 t \end{cases} \quad (5)$$

其通解为

$$\begin{cases} p(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t \\ q(t) = c \cos \omega_0 t + d \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (6)$$

将式(6)代入式(5),再用  $\sin \omega_0 t$  和  $\cos \omega_0 t$  作内积,得

$$\begin{cases} -c\xi\omega_0^3 - \frac{8}{5}a\omega_0\Omega = 0 \\ d\xi\omega_0^3 + \frac{8}{5}b\omega_0\Omega = -\frac{1}{5}F_B \\ -a\xi\omega_0^3 + \frac{8}{5}c\omega_0\Omega = 0 \\ b\xi\omega_0^3 - \frac{8}{5}d\omega_0\Omega = -\frac{1}{5}F_A \end{cases} \quad (7)$$

解式(7),并结合式(6)可得

$$\begin{aligned} w(\varphi, t) &= \frac{-8F_B\Omega - 5F_A\omega_0^2\xi}{64\omega_0\Omega^2 + 25\xi^2\omega_0^5} \sin \omega_0 t \cos 2\varphi + \\ & \frac{8F_A\Omega - 5F_B\omega_0^2\xi}{64\omega_0\Omega^2 + 25\xi^2\omega_0^5} \sin \omega_0 t \sin 2\varphi = \\ & \sqrt{b^2 + d^2} \sin \omega_0 t \cos(\varphi - \theta) \quad (8) \end{aligned}$$

在力反馈模式下,四波腹型相对于基座静止,即  $\theta=0$ ,则

$$\begin{cases} \Omega = \frac{5F_B\omega_0^2\xi}{8F_A} \\ w(\varphi, t) = \sqrt{b^2 + d^2} \sin \omega_0 t \cos \varphi \end{cases} \quad (9)$$

由式(9)可知,在力反馈模式下,输出角速度与反馈激励成正比;径向位移在任意角位置  $\varphi$  处都随时间做弦振动,而当时间  $t$  固定,径向位移随角位置  $\varphi$  成弦分布。这些与半球陀螺的工作原理相一致,说明了推导结果的正确性。

## 2 加速度影响分析

### 2.1 加速度对谐振子影响

当任意加速度  $a$  作用在谐振子上时,相当于在谐振子的任意一点施加了惯性力,即

$$F = -ma \quad (10)$$

谐振子上的受力需由式(2)改为

$$F(\varphi, t) = F_A \cos \lambda t \cos 2\varphi + F_B \cos \lambda t \cos 2(\varphi - 45) - ma \quad (11)$$

由式(11)可知,当  $a$  存在时,谐振子上就存在惯性力,当  $a$  较大时,甚至引起谐振子的微小变形,不仅影响谐振子的四波腹振动,且影响振幅的检测结果,从而引起陀螺的测量误差。

### 2.2 加速度对谐振子偏心影响

$a$  的分量会引起谐振子的偏心,如图1所示。

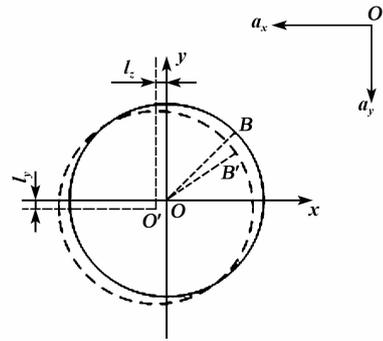


图1 谐振子偏心图

加速度引起谐振子中心偏离基座中心,就会引起振幅检测系统的测量误差,从而影响反馈激励的大小,导致测量误差。

## 3 静态误差补偿实验

### 3.1 误差模型的选择

经过分析可知,敏感轴向的加速度对半球谐振陀螺输出无影响,因此,在误差模型中无需包含  $a_z$  项。由实验可知,加速度对半球谐振陀螺的影响较小,故本文只对其常数项和一次项进行标定。则选取的静态误差模型为

$$\Delta\Omega = K_f + K_x a_x + K_y a_y \quad (12)$$

式中: $\Delta\Omega$  为陀螺的测量角速度误差; $K_f$  为陀螺测量误差的常数项; $K_x$ 、 $K_y$  分别为与  $a_x$ 、 $a_y$  相关的一次项误差系数。

### 3.2 方位定向及误差系数解算

由于实验条件的限制,实验室只有二轴转台可供使用,且转台初始状态的自由度在南北和天地两个轴向上,因此本文设计了基于二轴转台的六位置标定方法。记陀螺坐标系为  $x_yI$ ,其中  $I$  轴为敏感轴。将半球谐振陀螺安装在转台上的初始方位为:敏感轴( $I$  轴)指向天向, $y$  轴指向北方, $x$ 、 $y$ 、 $I$  轴成右手定则。那么半球谐振陀螺的方位定向如表 1 所示,每个位置相应的角速度表达式如表 2 所示。

表 1 半球谐振陀螺方位定向

位置	内环轴	外环轴
一位置(东北天)	0°	0°
二位置(西南天)	180°	0°
三位置(天南东)	180°	-90°
四位置(地南西)	180°	90°
五位置(南天西)	270°	90°
六位置(北地西)	90°	90°

6 个位置对应的角速度分别为

$$\bar{\Omega}_1 = K_{If} + \omega_z - E_x \cdot \omega_N \sin \theta + E_y \cdot \omega_N \cos \theta \quad (13)$$

$$\bar{\Omega}_2 = K_{If} + \omega_z + E_x \cdot \omega_N \sin \theta - E_y \cdot \omega_N \cos \theta \quad (14)$$

$$\bar{\Omega}_3 = K_{Ix} - K_x g - \omega_N \sin \theta + E_x \omega_z - E_y \omega_N \cos \theta \quad (15)$$

$$\bar{\Omega}_4 = K_{Ix} + K_x g + \omega_N \sin \theta - E_x \omega_z -$$

$$E_y \omega_N \cos \theta \quad (16)$$

$$\bar{\Omega}_5 = K_{Iy} - K_y g + \omega_N \sin \theta - E_x \omega_N \cos \theta + E_y \omega_z \quad (17)$$

$$\bar{\Omega}_6 = K_{Iy} + K_y g + \omega_N \sin \theta + E_x \omega_N \cos \theta - E_y \omega_z \quad (18)$$

式中: $K_{Ix}$ 、 $K_{Iy}$ 、 $K_{If}$  分别指  $x$ 、 $y$ 、 $I$  轴垂直放置时与加速度无关的常数项,它们基本一致,略有差别,体现了对  $K_f$  更高精度的要求; $K_x$ 、 $K_y$  分别为  $x$ 、 $y$  轴与加速度一次项有关的误差系数; $\theta$  为初始安装时陀螺  $y$  轴与北向的夹角,规定它的值沿顺时针方向为正; $\omega_z = \omega_e \sin \varphi$ ,  $\omega_N = \omega_e \cos \varphi$ ,  $\omega_e$  为地球自转角速度, $\varphi$  为测试点纬度; $E_x$ 、 $E_y$  为失准角引起的误差系数。式(13)~(18)中含有 6 个未知系数,可解出未知系数。

### 3.3 实验设计及数据处理

1) 实验方法。将陀螺安装在转台上,使用温控箱将温度控制在 20 °C,按照表 1 给出的 6 个位置进行实验,旋转到每个位置稳定 1 min 后采集数据,采集频率为 2 Hz,采集数据长度为 600。为了分析误差系数的稳定性,每隔 24 h 采集一次数据,共采集 5 次。

2) 数据处理方法。求出陀螺在每个位置稳定后输入的平均角速度值  $\bar{\Omega}$ ,然后减去陀螺的零偏,得到  $\bar{\Omega}_1 \sim \bar{\Omega}_6$ ,再根据式(13)~(18)就可计算出需要标定的误差系数。求出每个误差系数 5 次测量的标准差,用来分析误差系数的稳定性。通过对 71# 陀螺基本参数的测试可知,陀螺的零输入、输出为  $-6.186 5 \times 10^{-4}$  V,标度因数为 0.336。5 个误差系数的 5 次标定结果如表 2 所示。

表 2 标定结果

次数	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次
$K_{If}$	-0.004 5	-0.004 3	-0.004 6	-0.004 5	-0.004 4
$\sigma_{K_{If}}$	$1.019 8 \times 10^{-4}$		$\bar{K}_{If}$		-0.004 5
$K_{Ix}$	$1.545 1 \times 10^{-4}$	$2.166 9 \times 10^{-4}$	$1.909 2 \times 10^{-4}$	$1.391 6 \times 10^{-4}$	$2.150 7 \times 10^{-4}$
$\sigma_{K_{Ix}}$	$3.1494 \times 10^{-5}$		$\bar{K}_{Ix}$		$2.0806 \times 10^{-4}$
$K_{Iy}$	$1.831 4 \times 10^{-4}$	$2.439 4 \times 10^{-4}$	$2.166 7 \times 10^{-4}$	$1.711 6 \times 10^{-4}$	$2.253 9 \times 10^{-4}$
$\sigma_{K_{Iy}}$	$2.699 8 \times 10^{-5}$		$\bar{K}_{Iy}$		$2.080 6 \times 10^{-4}$
$K_x$	$1.867 8 \times 10^{-6}$	$2.100 4 \times 10^{-6}$	$2.310 8 \times 10^{-6}$	$3.566 5 \times 10^{-6}$	$2.564 3 \times 10^{-6}$
$\sigma_{K_x}$	$5.890 8 \times 10^{-7}$		$\bar{K}_x$		$2.482 0 \times 10^{-6}$
$K_y$	$-3.698 8 \times 10^{-6}$	$-3.386 6 \times 10^{-6}$	$-4.523 1 \times 10^{-6}$	$-2.391 7 \times 10^{-6}$	$-3.100 8 \times 10^{-6}$
$\sigma_{K_y}$	$7.007 1 \times 10^{-7}$		$\bar{K}_y$		$-3.420 2 \times 10^{-6}$

由表2可知,表中所有误差系数的标准差数量级都比误差系数的数量级低一级,说明了误差系数标定值具有一定稳定性;但是标准差数值较大,说明数据稳定性较差,可以采用一次通电的方法来解决这个问题。

### 3.4 补偿效果验证

为了对补偿效果进行对比,首先使用5组数据的平均值补偿第一组数据,然后用第一组数据得到的系数对自己进行补偿,得到结果如表3所示。

表3 补偿效果验证

	位置1	位置2	位置3
原始均值/ $10^{-4}$	-6.701 9	-7.327 5	3.502 5
均值补偿/ $10^{-5}$	-3.633 0	2.807 0	1.277 4
一次补偿/ $10^{-5}$	-3.633 0	2.807 0	0.324 00
	位置4	位置5	位置6
原始均值/ $10^{-4}$	-2.445 4	-2.312 3	-2.494 1
均值补偿/ $10^{-5}$	3.464 4	4.870 4	1.418 4
一次补偿/ $10^{-5}$	1.462 3	4.124 1	0.489 44

分析表3的结果可得以下结论:

1) 使用均值进行补偿的效果明显不如一次通电进行补偿的效果,说明了半球谐振陀螺静态误差系数不稳定,可以使用一次通电法来解决这一问题。

2) 补偿后输出的平均值比原始数据平均值低1个数量级,说明了补偿方法的有效性;通过补偿切实减小了输出的系统误差。

3) 补偿后数据的平均值不为0,说明输出中还含有由其他因素引起的系统误差。

### 4 结束语

本文针对当前半球谐振陀螺静态误差问题,首先分析了加速度对半球谐振陀螺的影响,而后设计了基于二轴转台的六位置标定方法,最后通过误差系数对陀螺输出进行补偿。结果表明,通过标定补偿可有效减小陀螺的系统误差,使其精度提高1个数量级以上。

### 参考文献:

- [1] 赵曦晶,汪立新,何志昆,等. 光纤陀螺温度漂移补偿[J]. 压电与声光,2013,35(4):528-532.  
ZHAO Xijing, WANG Lixin, HE Zhikun, et al. Modeling and compensation of FOG temperature drift[J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2013, 34(5):528-532.
- [2] 宋丽君,秦永元. MEMS陀螺仪的一种实用标定法[J]. 压电与声光,2010,32(3):372-374.  
SONG Lijun, QIN Yongyuan. A practical calibration method on MEMS gyroscope [J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2010, 32(3):372-374.
- [3] SARAPULOV S A. 15 years of solid-state gyro dynamics development in the soviet union and ukraine: results and perspectives of applied theory[C]// Santa Monica, CA: Proceedings of the National Technical Meeting of the Institute of Navigation, 1997:151-164.
- [4] 李成,刘洁瑜,张斌. 半球谐振陀螺仪随机漂移数学模型研究[J]. 压电与声光,2012,34(5):695-698.  
LI Cheng, LIU Jieyu, ZHANG Bin. Research on mathematic model of random drift of hemispherical resonant gyro[J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2012, 34(5):695-698.
- [5] 周小刚,汪立新,余婧,等. 半球谐振陀螺温度补偿与实验研究[J]. 宇航学报,2010,31(4):1083-1087.  
ZHOU Xiaogang, WANG Lixin, SHEN Qiang, et al. HRG temperature compensation and experiment research [J]. Journal of Astronautics, 2010, 31(4):1083-1087.
- [6] 杨勇,胡晓东,谭文跃,等. 基于优化半球谐振子性能的工艺技术[J]. 压电与声光,2014,36(2):221-224.  
YANG Yong, HU Xiaodong, TAN Wenyue, et al. Technology based on optimized HRG resonator performance [J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2014, 36(2):221-224.
- [7] 周小刚,汪立新,方针,等. 半球谐振陀螺平台调平系统设计及仿真[J]. 宇航学报,2011,32(3):549-553.  
ZHOU Xiaogang, WANG Lixin, FANG Zhen, et al. Design of HRG leveling system and simulation experiment [J]. Journal of Astronautics, 2011, 32(3):549-553.
- [8] 易康. 半球谐振陀螺误差分析和滤波方法研究[D]. 长沙:国防科技大学,2005.