

基于 MEKF 的捷联惯导初始对准算法研究

方 轩,高敬东,薛博阳

(海军工程大学 导航工程系,湖北 武汉 430033)

摘 要:在某些对精度要求不是很高的领域微机电系统(MEMS)等低精度捷联惯导系统因其造价低等特点而得到广泛应用。由于传统的初始对准方法不能估计除姿态以外的任何量,故不适用于 MEMS 等低精度捷联惯导系统。该文研究了一种基于姿态估计的初始对准方法,并使用乘性扩展卡尔曼滤波进行对准,在姿态对准的同时实现对惯性器件误差的建模估计。在实现初始对准的基础上显著降低了计算量。

关键词:低精度;捷联惯导系统;初始对准;乘性扩展卡尔曼滤波;惯性器件误差

中图分类号:U666.1

文献标识码:A

Study on the Initial Alignment Algorithm of SINS Based on Multiplicative Extended Kalman Filter (MEKF)

FANG Xuan, GAO Jingdong, XUE Boyang

(Dept. of Navigation, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract: In some areas of accuracy is not very high, the low accuracy of SINS like MEMS have wide applications for its low cost, but MEMS does not apply to the conventional initial alignment because they can estimate nothing but posture. A kind of initial alignment based on EKF is studied in this paper, and the multiplicative extended Kalman Filter (MEKF) is used for aligning. The estimation of inertial device error modeling is realized as the posture alignment. The amount of calculation is reduced significantly while the initial alignment is realized.

Key words: attitude estimation; SINS; initial alignment; multiplicative extended Kalman filter; inertial sensor error

0 引言

基于姿态确定的惯性系初始对准方法将初始对准问题转化为利用矢量观测进行姿态确定的问题,建立了这两个平行研究数十年问题之间的联系,并将姿态确定问题中一些成熟算法引入到初始时刻常值姿态矩阵的求解中^[1-2]。该方法能有效处理外界运动干扰,在中高精度捷联惯导(如激光和光纤捷联惯导)中已得到广泛的实际应用和推广^[3-4],但其未对惯性器件误差进行建模,因此,其本质上仍然是一种解析粗对准方法。不难推测,因其不能估计除姿态以外的任何量而不再适用于基于微机电系统(MEMS)低精度捷联惯导系统。针对此问题,常路宾提出了一种基于姿态估计的初始对准方法^[5-9],在姿态对准的同时实现了对陀螺漂移的建模估计,从

而有效地解决了低精度捷联惯导系统初始对准问题。但该方法在执行过程中使用的是无味四元数估计算法(USQUE),在实际运用中存在计算量过大的问题,尤其对于低精度系统而言,其没有更多的空间去执行运算量大的滤波算法。本文提出利用乘性扩展卡尔曼滤波(MEKF)实现基于姿态估计的初始对准算法,在保证精度的同时也降低了计算量,该方法在实验中得到了有效验证。

1 基于坐标系分解的姿态估计模型构建

根据姿态矩阵链式法则及坐标系定义可得

$$C_b^n(t) = C_{b(t)}^{n(t)} = C_{n(0)}^{n(t)} C_{b(0)}^{n(0)} C_{b(t)}^{b(0)} = C_{n(0)}^{n(t)} C_b^n(0) C_{b(t)}^{b(0)} \quad (1)$$

式中: C_b^n 为载体坐标系相对于导航坐标系的姿态转移矩阵; b 系为载体坐标系相对惯性空间凝固所得

收稿日期:2016-02-24

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61304241,61374206)

作者简介:方轩(1986-),男,湖北武汉人,硕士生,主要从事惯性技术及应用方面的研究。通信作者:高敬东,男,硕士生导师,主要从事惯性技术方面的教学与研究。

的惯性坐标系; n 系为导航坐标系相对惯性空间凝固所得的惯性坐标系。

由式(1)可得

$$\mathbf{C}_b^n(t) = \mathbf{C}_{n(0)}^{n(t)} \mathbf{C}_b^n(0) \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} = \mathbf{C}_{n(0)}^{n(t)} \mathbf{C}_{b(t)}^{n(0)} \quad (2)$$

基于对惯性坐标系的定义, $n(0)$ 系是一惯性系, 因此, 式(2)可写为

$$\mathbf{C}_b^n(t) = \mathbf{C}_i^{n(t)} \mathbf{C}_{b(t)}^i \quad (3)$$

同理, $\mathbf{C}_{b(t)}^i$ 和 $\mathbf{C}_{n(t)}^i$ 分别为

$$\dot{\mathbf{C}}_{b(t)}^i = \mathbf{C}_{b(t)}^i \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{C}}_{n(t)}^i = \mathbf{C}_{n(t)}^i \boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \quad (5)$$

式中: $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 为载体运动角速度, 一般由陀螺仪测得; $\boldsymbol{\omega}_{in}^n$ 为导航坐标系运动角速度, 一般由地球自转和载体线运动引起; $(\cdot \times)$ 为某一矢量的反对称矩阵。

根据定义可知, 式(5)在求解时的初始值为

$$\mathbf{C}_{n(0)}^i = \mathbf{C}_{n(0)}^{n(0)} = \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad (6)$$

即其初始时精确已知的, 因此该项可根据地球自转角速度以及外测速度信息构建的运动角速度直接进行积分求解得到。相反, 式(4)中的初值为

$$\mathbf{C}_{b(0)}^i = \mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)} = \mathbf{C}_b^n(0) \quad (7)$$

对式(4)进行积分, 其初始值未知。如果我们认为给定一个初始值进行积分, 则计算得到的 $\mathbf{C}_{b(t)}^i$ 将会始终包含误差项。对此, 可通过构建外测观测信息进行修正, 即构造动态滤波模型。其中, 式(4)即为相应的状态模型。考虑陀螺常值漂移的影响, 将式(4)重写为

$$\dot{\mathbf{C}}_{b(t)}^i = \mathbf{C}_{b(t)}^i (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b(t) - \boldsymbol{\varepsilon}^b(t) - \boldsymbol{\eta}_{gv}) \times \quad (8)$$

式中: $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b(t)$ 为陀螺仪的实际输出; $\boldsymbol{\varepsilon}^b$ 为陀螺仪常值漂移; $\boldsymbol{\eta}_{gv}$ 为高斯白噪声。

式(8)为考虑陀螺仪常值漂移后的姿态估计状态模型, 为姿态矩阵的线性方程。因此, 在滤波设计时可考虑线性卡尔曼滤波, 在减小计算量的同时可以提高精度。

2 基于新模型的矢量观测构建

将该姿态矩阵分解式(2)代入惯导比力方程 $f^b = v^n + (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \boldsymbol{\omega}_{in}^b \times v^n - \mathbf{g}^n)$, 并在 $[t_m, t]$ 上进行积分可得

$$\int_{t_m}^t \mathbf{C}_{b(t)}^i \mathbf{C}_{b(\tau)}^{b(t)} f^b(\tau) d\tau = \int_{t_m}^t \mathbf{C}_{n(\tau)}^i [\dot{v}^n + (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{in}^n) \times v^n - \mathbf{g}^n] d\tau \quad (9)$$

式中: f^b 为载体坐标系内加速度的比力输出; v^n 为载体运动速度; \mathbf{g}^n 为地球重力矢量; $\boldsymbol{\omega}_{in}^n$ 为导航坐标

系相对于地球坐标系的运动角速度, 一般由载体线运动引起。

同理, $\mathbf{C}_{b(t)}^i$ 相对于积分算子 $d\tau$ 而言是常值矩阵, 因此可将其提到积分符号外面。经整理可得

$$\mathbf{C}_{b(t)}^i \int_{t_m}^t \mathbf{C}_{b(\tau)}^{b(t)} f^b(\tau) d\tau = \int_{t_m}^t \mathbf{C}_{n(\tau)}^i [\dot{v}^n + (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{in}^n) \times v^n - \mathbf{g}^n] d\tau \quad (10)$$

令

$$\boldsymbol{\alpha}_m = \int_{t_m}^t \mathbf{C}_{b(\tau)}^{b(t)} f^b(\tau) d\tau \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\beta}_m = \int_{t_m}^t \mathbf{C}_{n(\tau)}^i [\dot{v}^n + (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{in}^n) \times v^n - \mathbf{g}^n] d\tau \quad (12)$$

则有

$$\mathbf{C}_{b(t)}^i \boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\beta}_m \quad (13)$$

式(13)即为对应于式(8)的观测方程。式(11)对应的离散积分形式为

$$\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{C}_{b(t)}^{b(t_M)} \sum_{k=m}^{M-1} \mathbf{C}_{b(t_k)}^{b(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{C}_{b(\tau)}^{b(t_k)} f^b d\tau \approx \mathbf{C}_{b(t)}^{b(t_M)} \cdot \sum_{k=m}^{M-1} \mathbf{C}_{b(t_k)}^{b(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\mathbf{I} + \left(\int_{t_k}^t \boldsymbol{\omega}_{ib}^b dt \right) \right] f^b d\tau \quad (14)$$

式(12)中, 右边积分的第一项可以分解为

$$\int_{t_m}^t \mathbf{C}_{n(\tau)}^i \dot{v}^n(\tau) d\tau = \mathbf{C}_{n(\tau)}^i v^n(\tau) \Big|_{t_m}^t - \int_{t_m}^t \mathbf{C}_{n(\tau)}^i \boldsymbol{\omega}_{in}^n(\tau) \times v^n(\tau) d\tau \quad (15)$$

将式(15)代入式(11)可得

$$\boldsymbol{\beta}_m = \mathbf{C}_{n(\tau)}^i v^n(\tau) \Big|_{t_m}^t + \int_{t_m}^t \mathbf{C}_{n(\tau)}^i \boldsymbol{\omega}_{ie}^n(\tau) \times v^n(\tau) d\tau - \int_{t_m}^t \mathbf{C}_{n(\tau)}^i \mathbf{g}^n d\tau \quad (16)$$

3 乘性扩展卡尔曼滤波

由于我们在推导姿态估计模型的过程中均采用姿态矩阵表示方法, 而姿态四元数是所有姿态表示方法中全局无奇异的最小参数表示方法, 同时, 四元数还具有形式简单、计算量小等突出优点, 故一般在姿态更新和滤波设计中都采用四元数来表示姿态。因此, 我们首先给出所建立的姿态估计模型的四元数形式, 然后设计相应的姿态估计算法。

假设我们要估计的 $\mathbf{C}_{b(t)}$ 其对应的四元数形式为 $\mathbf{q} = [\rho^T, q_1]^T$, 其中 $\boldsymbol{\rho} = [q_1, q_2, q_3]^T$ 表示四元数中的矢量部分, 则对应于式(8)的四元数姿态更新方程为

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Xi}[\mathbf{q}(t)] \boldsymbol{\omega}(t) \quad (17)$$

其中

$$\Xi[q] = \begin{bmatrix} q_1 \mathbf{I}_{3 \times 3} + \boldsymbol{\rho} \times \\ -\boldsymbol{\rho}^T \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中: $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 为 3×3 的单位矩阵; $\boldsymbol{\rho} \times$ 为四元数矢量部分的斜对称矩阵, 具体形式为

$$\boldsymbol{\rho} \times = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

式(8)对应的离散形式的姿态更新矩阵为

$$\mathbf{q}_k = \Omega(\boldsymbol{\omega}_{k-1}) \mathbf{q}_{k-1} \quad (20)$$

其中

$$\Omega(\boldsymbol{\omega}_{k-1}) = \begin{bmatrix} Z_{k-1} & \psi_{k-1} \\ -\psi_{k-1}^T & \cos(0.5 \|\boldsymbol{\omega}_{k-1}\| \Delta t) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$Z_{k-1} = \cos(0.5 \|\boldsymbol{\omega}_{k-1}\| \Delta t) \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\psi_{k-1} \times] \quad (22)$$

$$\psi_{k-1} = \frac{\sin(0.5 \|\boldsymbol{\omega}_{k-1}\| \Delta t) \boldsymbol{\omega}_{k-1}}{\|\boldsymbol{\omega}_{k-1}\|} \quad (23)$$

式中 Δt 为陀螺仪的采样时间间隔。

我们直接给出姿态估计乘性扩展卡尔曼滤波算法的流程:

1) 初始化 设置初始参数 $\hat{q}_0, \hat{\beta}_0$ 和 P_0

2) 递推更新 for $k=1:K$ (K , total time steps)

3) 时间更新

$$\hat{q}_{k|k-1} = \Omega(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}) \hat{q}_{k-1} \quad (24)$$

$$\hat{\beta}_{k|k-1} = \hat{\beta}_{k-1} \quad (25)$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} - \hat{\beta}_{k-1} \quad (26)$$

$$P_{k|k-1} = \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T \quad (27)$$

4) 量测更新

$$h_k(\hat{x}_{k|k-1}) = C_b^i(\hat{q}_{k|k-1}) \boldsymbol{\alpha}_{m,k} \quad (28)$$

$$H_k(\hat{x}_{k|k-1}) = C_b^i(\hat{q}_{k|k-1}) \boldsymbol{\alpha}_{m,k} \quad (29)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T(\hat{x}_{k|k-1}) [H_k(\hat{x}_{k|k-1}) \cdot P_{k|k-1} H_k^T(\hat{x}_{k|k-1}) + R_k]^{-1} \quad (30)$$

$$P_k = [\mathbf{I}_{6 \times 6} - K_k H_k(\hat{x}_{k|k-1})] P_{k|k-1} \quad (31)$$

$$\Delta \hat{x}_k = K_k [\beta_{m,k} - h_k(\hat{x}_{k|k-1})] \quad (32)$$

5) 姿态更新

$$\Delta \hat{x}_k = [\Delta \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k^T \quad \Delta \hat{\beta}_k^T] \quad (33)$$

$$\hat{q}_k = \hat{q}_{k|k-1} + 0.5 \Xi(\hat{q}_{k|k-1}) \Delta \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k \quad (34)$$

$$\hat{\beta}_k = \hat{\beta}_{k|k-1} + \Delta \hat{\beta}_k \quad (35)$$

时间更新中状态方差传递矩阵的具体形式为

$$\Phi_{k-1} = \begin{bmatrix} \Phi_{k-1,11} & \Phi_{k-1,12} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (36)$$

其中

$$\Phi_{k-1,11} = \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{[\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} \times] \sin(\|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} \Delta t\|)}{\|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}\|} + \frac{[\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} \times]^2 (1 - \cos(\|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} \Delta t\|))}{\|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}\|^2} \quad (37)$$

$$\Phi_{k-1,12} = \frac{[\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} \times] (1 - \cos(\|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} \Delta t\|))}{\|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}\|^2} - \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{[\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} \times]^2 (\|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} \Delta t\| - \sin(\|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} \Delta t\|))}{\|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}\|^3} \quad (38)$$

离散形式的状态噪声方差阵为

$$Q_{k-1} = \begin{bmatrix} \left(\sigma_v^2 \Delta t + \frac{\sigma_u^2 \Delta t^3}{3} \right) \mathbf{I}_{3 \times 3} & - \left(\frac{\sigma_u^2 \Delta t^2}{2} \right) \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ - \left(\frac{\sigma_u^2 \Delta t^2}{2} \right) \mathbf{I}_{3 \times 3} & (\sigma_u^2 \Delta t) \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (39)$$

相应的状态噪声方差传递矩阵为

$$G_{k-1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (40)$$

4 实验研究

为了验证本文所研究姿态估计算法在初始对准中的有效性, 本节设计了相关车载实验。辅助信息是采用全球定位系统(GPS)输出的速度信息。实验中主要对以下4种对准方案进行验证:

主要车载设备包括低精度 MEMS 惯性测量单元 XW-IMU5220 和姿态航向参考系统(AHRS) XW-ADU7612。其中, XW-IMU5220 是北京星网宇达科技开发有限公司采用 MEMS 惯性器件、自行研制的高精度六自由度惯性测量单元。XW-ADU7612 是一个由3个高精度闭环光纤陀螺仪、3个硅加速度计和2个GPS天线(XW-ADU3601)构成的组合系统, 用来提供车载实验所需的高精度姿态、速度和位置参考。主要性能指标如表1、2所示。表中 $g=9.8 \text{ m/s}^2$ 。

表1 XW-IMU5220 的主要性能指标

	陀螺仪	加速度计
动态范围	± 150 ($^\circ$)/s	$\pm 10g$
更新率	100 Hz	100 Hz
零偏	≤ 0.5 ($^\circ$)/s	$\leq 0.005g$
零偏稳定性	≤ 0.02 ($^\circ$)/s	$\leq 0.001g$
零偏重复性	≤ 0.02 ($^\circ$)/s	$\leq 0.002g$

表 2 XW-ADU7612 的主要性能指标

系统精度	GPS 有效	无 GPS 信号
航向	0.1°(基线长度≥2 m)	60 s 无变化; 1 h 变化小于 1°
姿态	0.05°(静态); 0.1°(动态)	60 s 无变化; 1 h 变化小于 0.2°
速度	0.1 m/s	
位置	水平≤2 m(1σ); 高程≤4 m(1σ)	
更新率	10 Hz	

车载实验在空旷的学校操场进行,车辆行驶过程中始终能够收到 GPS 信号,因此,AHRS 提供的姿态作为评价 MEMS 捷联惯导初始对准精度的参考基准是可行的。

为了验证所提算法的有效性,分别进行了基于 USQUE 和 MEKF 的对准实验,两种方法在结束时刻的姿态估计误差总结如表 3 所示

表 3 姿态估计误差

	横滚角/(°)	俯仰角/(°)	航向角/(°)
MEKF 算法	0.05	-0.19	-1.22
USQUE 算法	0.04	-0.16	-0.37

图 1、2 为横滚角的估计和估计误差。图 3、4 为俯仰角的估计和估计误差。图 5、6 为航向角的估计

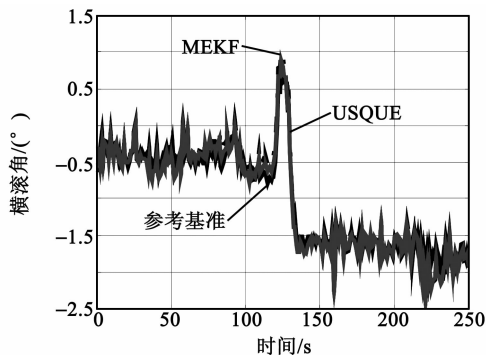


图 1 横滚角估计

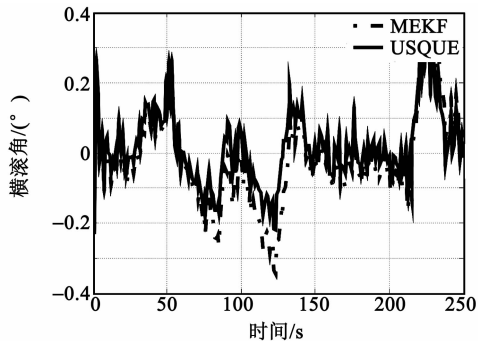


图 2 横滚角估计误差

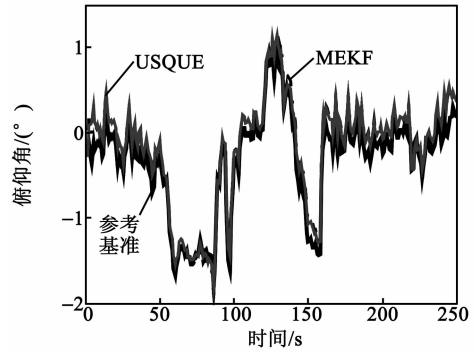


图 3 俯仰角估计

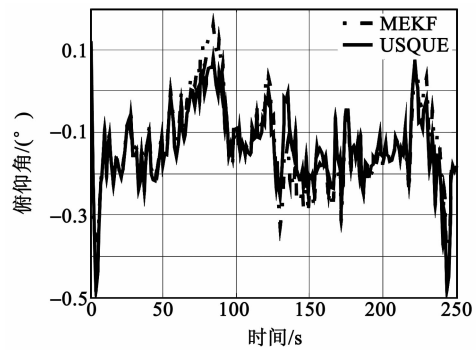


图 4 俯仰角估计误差

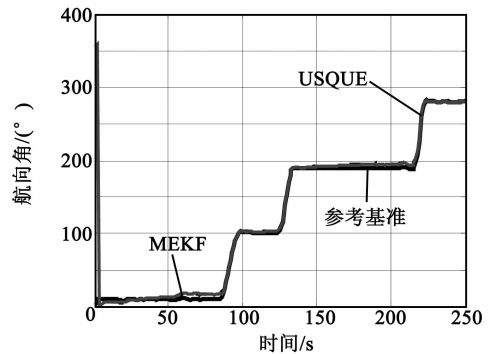


图 5 航向角估计

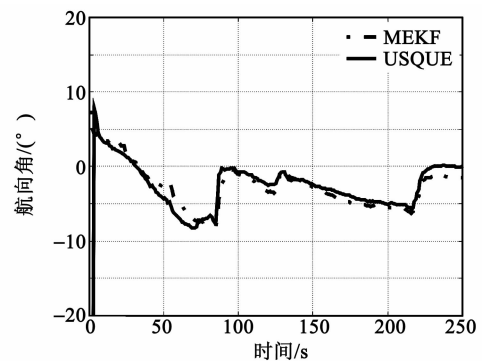


图 6 航向角估计误差

和估计误差。由图 1~6 可看出,MEKF 的对准精度稍低于 USQUE,但对于低精度 SINS 系统而言,这种精度在可接受的范围内,因此可认为 MEKF 有

效地完成了初始对准。实验中,MEKF的计算量仅为USQUE的18%,其计算量降低了,从而推动了其在实际系统中的应用。

5 结束语

本文研究了基于姿态估计的低精度SINS初始对准问题。针对传统USQUE计算量过大、不适用于实时应用的问题,本文提出了基于MEKF的初始对准方案。通过车载实验验证了所设计算法在低精度捷联惯导初始对准中的可行性。

参考文献:

- [1] WU Y X, PAN X F. Velocity/position integration formula, Part I: Application to in-flight coarse alignment[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2013, 49(2): 1006-1023.
- [2] WU Y X, WANG J L, HU D W. A new technique for ins/gnss attitude and parameter estimation using on-line optimization [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(10): 2642-2654.
- [3] 何昆鹏, 王晓雪. 系统状态下捷联惯导自对准算法[J]. 压电与声光, 2015, 37(4): 566-569.
HE Kunpeng, WANG Xiaoxue. Algorithm design of self-alignment in ship-based SINS[J]. Piezoelectrics & Acousto-optics, 2015, 37(4): 566-569.
- [4] 王解, 郭晓松, 周召发, 等. 基于四元数的SINS静基座大方位失准角误差建模[J]. 压电与声光, 2014, 36(5): 805-809.
WANG Jie, GUO Xiaosong, ZHOU Zhaofa, et al. Establishment of errors model for SINS on a stationary base with large azimuth misalignment angle based on quaternion[J]. Piezoelectrics & Acousto-optics, 2014, 36(5): 805-809.
- [5] CHANG L B, HU B Q, LI Y. Backtracking integration for fast attitude determination based initial alignment[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2015, 64(3): 795-803.
- [6] SILSON P M G. Coarse alignment of a ship's strap-down inertial attitude reference system using velocity loci[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2011, 60(6): 1930-1941.
- [7] KANG T Z, FANG J C, WANG W. Quaternion-optimization-based in-flight alignment approach for airborne POS[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2012, 61(11): 1916-2923.
- [8] CHANG Lubin, HU Baiqing, LI An, et al. Transformed unscented Kalman filter[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(1): 252-257.
- [9] CHANG L B, LI J S, CHEN S Y. Initial alignment by attitude estimation for strapdown inertial navigation systems [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2015, 64(3): 784-794.
- [1] 高胜利. 半球谐振陀螺的分析与研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2008.
- [2] 许国栋. 百年理论变现实-半球谐振陀螺仪投产[J]. 航空制造工程, 1999, 10: 3-5.
- [3] 吕志清. 半球谐振陀螺仪在宇宙飞船中的应用[J]. 压电与声光, 1999, 21(5): 349-353.
LV Zhiqing. The applition of HRG in the spacecraft[J]. Piezoelectrics & Acousto-optics, 1999, 21(5): 349-353.
- [4] 陈雪, 任顺清, 赵洪波, 等. 半球谐振子薄壁厚度不均匀性对陀螺精度的影响[J]. 空间控制技术与应用, 2009, 35(3): 29-33.
- [5] 谭天亚, 李春梅, 苏宇, 等. 超薄膜生长的 Monte Carlo 模拟研究[J]. 原子与分子物理学报, 2008, 25(1): 48.
- [6] 夏助力, 余彬海, 麦镇强. 近朗伯光型 LED 透镜的光学设计[J]. 光电技术应用, 2010, 25(1): 23-24.
- [7] 杨晓萍, 郑殊, 王正涵, 等. 动力学 Monte Carlo 模拟原子相互作用对薄膜外延生长的影响[J]. 纳米科技, 2011, 8(3): 2-4.
- [8] WANG L, CLAUCY P. Kinetic Monte Carlo simulation of the growth of polycrystalline Cu films[J]. Surface Science, 2001, 473: 25-35.

(上接第 941 页)

参考文献: