

# 基于声功率灵敏度的结构拓扑优化设计

黄银龙, 姜哲

(江苏大学 振动噪声研究所, 江苏 镇江 212013)

**摘要:**针对工程中普遍存在的薄板结构振动噪声问题,提出了一种对加强筋位置分布进行拓扑优化的控制方法。通过有限元动力学分析结构的速度响应,代入由声辐射模态推导的声功率求解方程中得到声功率。建立以加强筋位置作为设计变量的拓扑优化数学模型,寻找声功率最小的加筋分布。算法中以声辐射模态灵敏度为指导,确定拓扑优化加筋的起始点和搜索过程。通过仿真计算结果表明,优化得到的加筋布局能有效地将声功率降低 7.38 dB,并讨论了收敛准则和不同频率对加筋布局的影响,在第一阶固有频率内都可用此种算法优化。

**关键词:**声辐射模态;灵敏度分析;拓扑优化;降噪

**中图分类号:**TM301.4<sup>+</sup><sup>3</sup>;TB532 **文献标识码:**A

## Structure Topology Optimization Design Based on the Sound Power Sensitivity

HUANG Yinlong<sup>1</sup>, JIANG Zhe<sup>2</sup>

(Institute of Vibration and Noise, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

**Abstract:** Aiming at the vibration noise of thin plate existing in the engineering, a topology optimization method of the stiffener location distribution was proposed in this paper. The velocity dynamic response of the structure was analyzed by the finite element method, and the obtained results were substituted into the acoustic power equation deduced from the acoustic radiation mode to get the acoustic power. The topology optimization mathematical model considering the stiffener location as the design variable was established to find the stiffener location with minimum acoustic power. The starting points of stiffener and the search process were determined by the acoustic radiation modal sensitivity. The simulation result shows that the optimized stiffener distribution can effectively reduce the vibration noise by 7.38 dB. The influence of the convergence criterion and different frequency on the stiffener distribution was discussed. The proposed method can be used for optimizing the structure topology within the first natural frequency.

**Key words:** acoustic radiation mode; sensitivity analysis; topology optimization; noise reduction

### 0 引言

在车辆、船舶、飞行器中对振动噪声贡献较大的是普遍存在的板壳类结构,此类结构的优化设计研究对整机的振动噪声控制尤为重要。近年来,以布局设计为目的的拓扑优化改善结构的减振降噪性能成为目前研究的热点。Chia 等通过有限元分析,对约束阻尼板进行布局优化<sup>[1]</sup>。郭中泽等使用拓扑优化法确定阻尼材料铺设位置,以最大化模态损耗因子为目标函数,研究了阻尼材料在板结构上最优分布形式以降低振动噪声<sup>[2]</sup>。Olhoff N 通过拓扑优化对两种不同材料在设计区域内合理分布进行最小化简谐振动结构在指定区域的声压<sup>[3]</sup>。对结构加筋,可在不显著增加结构质量的前提下改善结构性能,而加筋的形状、位置、尺寸等因素则会直接影响

结构的减振降噪效果。Lam 等采用变厚度法,系统地研究板结构的加筋布局问题<sup>[4]</sup>。DU 和 Afonso 等提出板壳结构的系统优化策略,通过拓扑优化使板壳结构获得恰当的加筋布局,并在此基础上对加筋进行尺寸和形状优化<sup>[5]</sup>。陈炉云和王德禹用有限元、边界元法,通过渐进结构优化(ESO)进行了结构的拓扑优化分析,指出在外谐波力作用下结构-声辐射优化的可行性<sup>[6]</sup>。丁晓红等将类似植物根系生长的仿生设计技术用于板壳结构加筋分布设计中,提出一种简单高效的拓扑结构优化方法<sup>[7]</sup>。

目前,多数研究是以结构强度、刚度等为目标函数结合拓扑优化研究振动噪声问题。从声辐射角度来看,以声功率作为目标函数进行加筋位置优化的设计较少。因此本文基于声辐射模态建立了以加筋

收稿日期:2016-03-31

作者简介:黄银龙(1988-),男,河南平顶山人,硕士生,主要从事振动与噪声控制的研究。E-mail:yinlong3631@163.com。通信作者:姜哲(1954-),男,博士生导师,主要从事振动与噪声控制的研究。E-mail:zhe@ujs.edu.cn。

位置作为设计变量,利用拓扑优化,寻找最优的加筋布局的结构-声辐射优化方法。

### 1 结构振动模型

结构有限元振动分析是结构拓扑优化的前提。结构受外力( $F$ )的作用,结构响应微分方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_0 e^{i\omega t} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{M}$ 为质量矩阵; $\mathbf{C}$ 为阻尼矩阵; $\mathbf{K}$ 为刚度矩阵; $\ddot{\mathbf{X}}$ 和 $\dot{\mathbf{X}}$ 为位移的二阶导数和一阶导数,分别代表节点加速度矩阵和速度矩阵; $\mathbf{X}$ 为节点位移矩阵; $\mathbf{F}_0$ 为激励力幅值向量; $t$ 为时间因子; $\omega$ 为圆频率。设位移响应为

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 e^{i\omega t} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{X}_0$ 为给定的节点初始值。将式(2)代入式(1)中消除时间变量可得

$$\mathbf{X}_0 = (\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})^{-1} \mathbf{F}_0 \quad (3)$$

及结构表面振速分布:

$$\mathbf{V} = i\omega(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})^{-1} \mathbf{F}_0 \quad (4)$$

式中 $\mathbf{V}$ 为与振速有关的矩阵。

### 2 声辐射模态模型

根据声辐射模态的研究<sup>[8-11]</sup>,振动结构表面 $S$ 处于充满密度为 $\rho$ 的均匀介质中,以 $\omega$ 振动。各阶声辐射模态的声功率为

$$W = \sum_i \lambda_i |y_i|^2 \quad (5)$$

式中: $\lambda_i$ 为声辐射模态所对应的特征值,是第 $i$ 阶声辐射模态的辐射效率; $y_i$ 为平板法向振速关于声辐射模态的展开系数,即

$$y_i = \mathbf{Q}_i^T \mathbf{V} \quad (6)$$

式中 $\mathbf{Q}_i$ 为第 $i$ 阶声辐射模态。

在中低频,模态阶数越高,对声场的贡献越小,前几阶声辐射模态的声功率占总声功率的绝大部分,故采用模态截断,只取前几阶模态进行计算即可取得较高的精度<sup>[12]</sup>。因此,其辐射声功率为声辐射模态的前几阶声功率之和,即:

$$W = \sum_{i=1}^{MP} W_i = \sum_{i=1}^{MP} \lambda_i |y_i|^2 \quad (7)$$

式中 $MP$ 为截断模态数。

当平板辐射表面不变时, $\mathbf{Q}_i$ 和 $\lambda_i$ 也不变<sup>[13]</sup>,使得在对结构进行结构设计时,简化了声功率及其灵敏度的求解。

### 3 优化模型及算法

在优化设计模型中,本文将加筋单元等效为与基板单元相同的正交各向异性单元。在基板底层另

设一次薄板结构作为可行设计域。在优化过程中基板保持不变,只需改变设计层相应单元就可改变结构的刚度矩阵和质量矩阵。以这种加筋方式进行结构的加筋布局优化,即可得到最终清晰的加筋布局,也不会破坏基板结构参数。图1为基板层和设计层示意图。

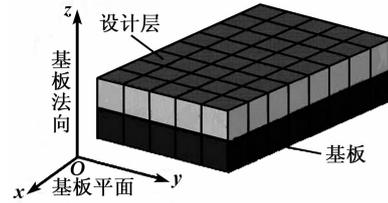


图1 基板层和设计层示意图

#### 3.1 拓扑优化模型

本文以加筋位置作为设计变量,如何合理布置加筋位置是研究的关键。拓扑优化问题本质是在满足一定几何约束下,以单元位置作为设计变量,对不同单元位置取值0或1,分别代表对单元位置是否加筋。采用合适的优化算法获取加筋分布,使得系统目标函数最优化。以辐射声功率作为目标函数的拓扑优化问题的数学模型1为例,即

1) 设计变量。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_m)^T \\ \rho_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (8)$$

式中: $\boldsymbol{\rho}$ 为加筋可行域; $\rho_i$ 为第 $i$ 个单元的加筋情况,0为未加筋,1为加筋; $m$ 为可行域内可加筋单元数。

2) 优化目标为 $\min_{\boldsymbol{\rho}} W(\boldsymbol{\rho})$ 。

3) 约束条件。

$$n = \sum_{i=1}^m \rho_i \leq N \quad (9)$$

式中 $N$ 为设定的加筋单元数。

随着加筋单元数增加,对声辐射的控制效果也有影响,因此,从加筋经济性考虑,对加筋单元数进行约束。在合适的加筋单元数范围内,达到了即经济又有效的控制效果。因此,在模型1的基础上,建立如下拓扑优化数学模型2,即

1) 设计变量。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_m)^T \\ \rho_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (10)$$

2) 优化目标为 $\min W(\boldsymbol{\rho})$ 。

3) 约束条件。

$$\epsilon_k = \frac{W_k - W_{k-1}}{W_{k-1}} \leq \epsilon^* \quad 1 \leq k \leq m \quad (11)$$

式中:  $W_k$  为  $k$  个加筋的结构辐射声功率;  $\epsilon_k$  为对应的加筋单元灵敏度;  $\epsilon^*$  为灵敏度收敛值。选取合适的收敛值, 达到优化效果的前提下, 满足经济性要求。

### 3.2 优化算法

为了实现目标函数的最小化, 在文献[14]的启发下, 制定了使加筋的增加过程类似植物根茎生长的优化算法。首先通过灵敏度分析选定最敏感单元作为拓扑优化的起始点, 围绕起始点周围以最速下降法理论搜索新的加筋单元位置, 并以灵敏度作为收敛约束条件完成最优加筋布局, 实现声功率最小化的目标。

#### 3.2.1 起始单元选择

起始点选择对加筋结果影响较大, 通过对灵敏度分析, 起始点选取准则为选择灵敏度最敏感单元作为加筋的起始单元。声功率单元灵敏度用于预测单元不同位置对声功率的影响程度, 即

$$\delta_k = \frac{W_k - W_0}{W_0} \quad k=1, 2, \dots, m \quad (12)$$

式中  $W_0$  为未加筋时辐射的声功率。

$\delta_k$  为正时, 表示第  $k$  单元加筋对声功率起增大作用, 数值越大, 使声功率增大越多;  $\delta_k$  为负时, 表示第  $k$  单元加筋对声功率起降低作用,  $\delta_k$  越小, 声功率降低越多。选择最小极值  $\delta_k$  的单元作为起始单元。

#### 3.2.2 搜索过程

在起始单元确定后, 进行加筋位置搜索。以当前加筋单元为中心, 在相邻单元设立增长子集, 若某相邻单元已完成加筋, 则此单元不包含在增长子集中。下一加筋位置从增长子集中产生。第  $k$  次搜索过程的增长子集中共  $t$  个单元:

$$P_k = [\rho_k^1, \rho_k^2, \dots, \rho_k^t] \quad (13)$$

搜索过程位置选择由最速下降法理论实现。以声功率为目标函数, 根据最速下降法在增长子集中, 以最大梯度方向搜索加筋单元。如此往复, 逐步实现目标函数最小化。

#### 3.2.3 收敛准则

在模型 2 约束条件中, 通过对  $\epsilon^*$  的设置, 可对加筋单元数进行约束。若目标参数的单元灵敏度  $\delta_k$  连续 3 次大于或等于既定的  $\epsilon^*$ , 则完成搜索进程。

根据上述过程, 实现优化流程如图 2 所示。

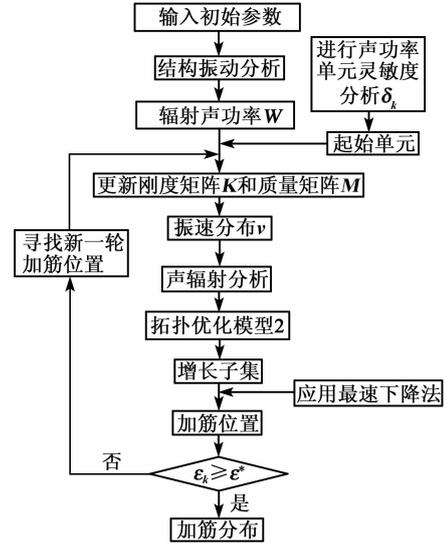


图 2 优化流程图

## 4 算例分析

假设一个位于无限大障板上受到激励产生振动的简支板, 选取板长  $L_x=0.3$  m, 板宽  $L_y=0.3$  m, 板厚  $h=0.008$  m 的四边简支板作为研究对象, 筋与板的材料相同。其弹性模量  $E=2.1 \times 10^{11}$  Pa, 泊松比  $\nu=0.30$ , 材料密度  $\rho_m=7900$  kg/m<sup>3</sup>。声学介质为空气, 密度  $\rho_a=1.205$  kg/m<sup>3</sup>, 声速  $c=343$  m/s。将板用四边形 4 节点单元离散为  $15 \times 15$  有限单元。在中低频时, 声辐射模态的辐射效率以前几阶为主, 故采用模态截断只取前几阶模态即可得到较精确的结果<sup>[12]</sup>。本例取前 3 阶, 计算辐射声功率, 不考虑结构阻尼。

### 4.1 起始点选择

本文以声功率单元灵敏度最小极值处, 即对加筋最敏感的单元作为起始点。在板中央施加简谐波力  $F=F_0 e^{i\omega t}$  ( $F_0=10$  N,  $f=200$  Hz)。设定单元加筋厚为 0.004 m。通过对结构进行声功率单元灵敏度分析, 求得在不同位置加筋时声功率的变化率, 如图 3 所示。

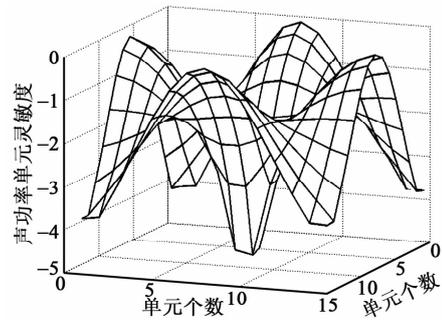
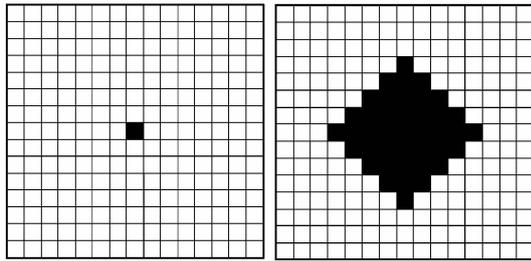


图 3 声功率单元灵敏度

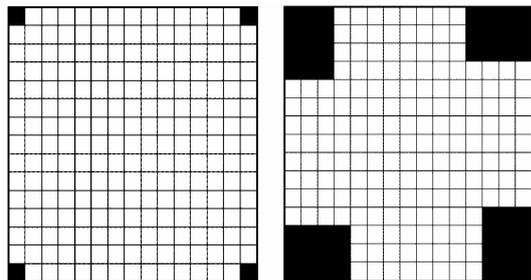
由图 3 可知, 在板上各个位置加筋对声功率的敏感程度不同。可将最敏感位置分为两类, 即

1) 选择在中心位置处单元作为加筋起始单元,如图 4(a)所示。

2) 处于四角位置单元作为起始单元,如图 5(a)所示。



(a) 起始点位置 (b) 优化结果  
图 4 起始点与优化结果示意图



(a) 起始点位置 (b) 优化结果  
图 5 起始点与优化结果示意图

### 4.2 拓扑优化过程

通过 MATLAB 编写优化算法程序,从起始点开始,搜索声辐射模态声功率最小化的加筋单元位置,使辐射声功率最小。

对第一类处于中间位置的起始单元进行优化,设置  $\epsilon^* = -0.1$ ,经优化算法进行仿真模拟计算,得到的加筋布局如图 4(b)所示。

对第二类处于四角位置的起始点进行优化,由于四角处的敏感程度较第一类略小,因此将  $\epsilon^*$  设置小一些,即  $\epsilon^* = -0.15$ ,经优化算法进行计算,得到的加筋布局如图 5(b)所示。

将两类加筋优化结果通过对称性等因素适当修正合并,得到的最终优化加筋布局如图 6 所示。由图可知,在激励点附近,刚度得到明显加强,这对结构

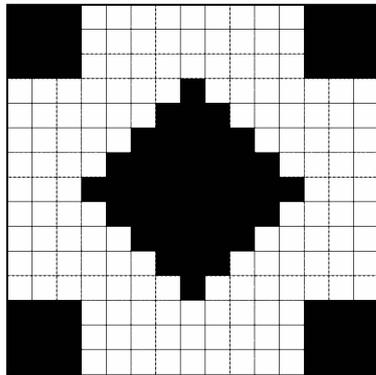


图 6 最终优化加筋布局

振动抑制是很有效的。通过仿真计算,此种布局加筋结构辐射声功率级比未加筋时声功率级降低了 7.38 dB,降幅明显。

### 4.3 对收敛准则的讨论

加筋单元数量与设置的  $\epsilon^*$  密切相关。通过对第一类加筋布局进行分析,当  $\epsilon^*$  取不同值时,得到的加筋单元数也不同,如表 1 所示。

表 1 不同收敛值对加筋结果的影响

$\epsilon^*$	加筋单元数	声功率降低量 $\Delta W/\text{dB}$
-0.45	8	1.07
-0.35	14	1.95
-0.25	23	2.66
-0.15	34	3.57
-0.10	41	4.27
-0.05	63	4.68

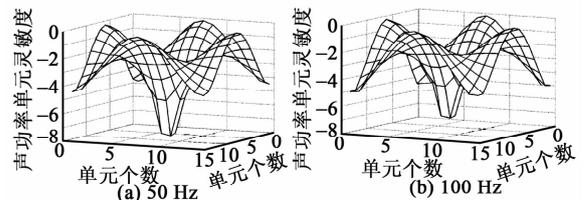
当  $\epsilon^* = -0.25$  时,加筋单元数为 23,  $\Delta W = 2.66$  dB; 当  $\epsilon^* = -0.10$  时,加筋单元数为 41,  $\Delta W = 4.27$  dB; 当收敛值  $\epsilon^* = -0.05$  时,加筋单元数为 63,  $\Delta W = 4.68$  dB。随着加筋单元数的增加,降噪效率逐渐降低。

收敛指标不同,最终加筋单元数也不同,所取得的降噪效果也不同。随着收敛值逐渐趋近于 0,单元灵敏度逐渐降低,加筋所取得的降噪效果越不明显。收敛值过小,会使加筋单元数过少,降噪效果不理想;而收敛值过大,则加筋单元数过多,经济成本增加,取得的效果却很小。因此,收敛值的选择是噪声控制效果评价指标的关键因素,在实际中需综合考虑各种因素进行确定。

### 4.4 不同频率对加筋分布影响

起始单元的选择与加筋分布密切相关,起始单元选择不同,对加筋分布有重要影响。因此本文在其他条件不变的情况下,对结构施加不同频率的激励力,研究不同频率对起始点选择和加筋分布的影响。

在第 4 小节算例中基板第一阶固有频率为 436 Hz。通过对不同频率激励力下声功率单元灵敏度分析发现,在第一阶固有频率范围内,单元灵敏度都有类似的规律。图 7 为分别列出了 4 个频率处于第一阶固有频率范围内的单元灵敏度图。



(a) 50 Hz (b) 100 Hz

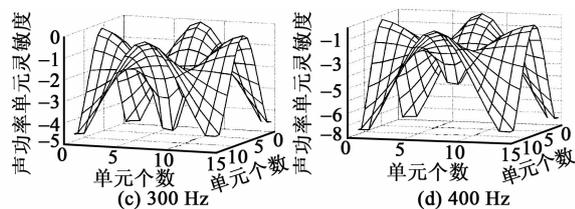


图7 频率不同时声功率单元灵敏度

由图7可知,中间和四角位置都是灵敏度的最小极值点。根据起始点选择标准,当激励力频率在第一阶固有频率内时,起始点都选择在中间和四角位置。通过优化算法进行仿真计算,搜索使目标函数最小的加筋布局,得到优化结果与图6相同。激励力频率低于第一阶固有频率时,都可得到相同的加筋布局。

激励力频率在结构第一阶固有频率范围内时,这种以加筋位置为设计变量的拓扑优化法都可适用。在中高段频率加筋规律有待进一步研究。

## 5 结束语

本文提出一种基于声功率灵敏度确定其最佳加筋布局的拓扑优化方法。以加筋位置作为设计变量,辐射声功率最小化为目标函数。以声功率灵敏度为指导,确定起始点进行拓扑优化,通过最速下降法寻找结构声辐射性能最优加筋布局。

通过对收敛指标的分析,设置的收敛值与加筋单元数有密切关系,加筋的降噪效率随着加筋单元数增加逐渐降低。因此,在工程实际中需综合考虑噪声控制效果和经济性的平衡选择合适的收敛值。激励力频率处于结构第一阶固有频率范围内,该方法都可适用。通过对结构加筋优化,使其在有限的质量增加情况下有效降低声功率。结果表明该方法的有效性,对工程实际中减振降噪问题具有一定的参考价值。

## 参考文献:

[1] CHIA C M, RONGONG J A. Strategies for using cellular automata to locate constrained layer damping on vibrating structures[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 319(1/2): 119-139.

[2] 郭中泽, 陈裕泽. 基于准则法的阻尼结构拓扑优化[J]. *宇航学报*, 2009, 30(6): 2387-2391.  
GUO Zhongze, CHEN Yuze. Topology optimization of the damping structure with optimal criteria[J]. *Journal of Astronautics*, 2009, 30(6): 2387-2391.

[3] DU Jianbin, OLHOFF N. Minimization of sound radiation from vibrating bi-material structures using topology optimization[J]. *Structures Multi-disciplinary Optim*, 2007, 33(4/5): 305-321.

[4] LAM Y C, SANTHIKUMAR S. Automated rib location and optimization for plate structures[J]. *Structural Multi-disciplinary Optimization*, 2003, 25(1): 35-45.

[5] AFONSO S M B, BELBLIDIA F, SIENZ J. Design of plates and shells using several optimization strategies [C]//S. I.: *Multi-disciplinary Analysis and Optimization Conference(AIAA)*, 2004.

[6] 陈炉云, 王德禹. 基于渐进结构优化的结构-声拓扑优化研究[J]. *声学学报*, 2008, 33(5): 456-461.  
CHEN Luyun, WANG Deyu. Structural-acoustic topology optimization analysis based evolutionary structural optimization method[J]. *Acta Acustica*, 2008, 33(5): 456-461.

[7] 丁晓红, 林建中. 利用植物根系形态机理的加筋薄壳结构拓扑优化设计[J]. *机械工程学报*, 2008, 44(4): 201-205.  
DING Xiaohong, LIN Jianzhong. Topology optimization of stiffened thin-wall shell structures based on growth mechanism of root system[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2008, 44(4): 201-205.

[8] CUNEFARE K A. The radiation modes of baffled finite plates[J]. *Acoust Soc Am*, 1995, 98(3): 1570-1580.

[9] CUNEFARE K A. On the exterior acoustic radiation modes of structure[J]. *Acoust Soc Am*, 1994, 96(4): 2302-2312.

[10] ELLIOTT S J, JOHNSON M E. Radiation modes and the active control of sound power[J]. *Acoust Soc Am*, 1993, 94(4): 2194-2204.

[11] 姜哲. 声辐射问题中模态分析 I. 理论[J]. *声学学报*, 2004, 29(6): 507-515.  
JIANG Zhe. A modal analysis for the acoustic radiation problems: I. theory[J]. *Acta Acustica*, 2004, 29(6): 507-515.

[12] 袁国清, 姜哲. 基于声辐射模态模型求解声功率灵敏度[J]. *振动与冲击*, 2009, 28(8): 109-112  
YUAN Guoqing, JIANG Zhe. Method for solving sound power sensitivity based on the theory of acoustic radiation modes[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2009, 28(8): 109-112.

[13] 毛崎波, 徐柏龄. 通过设计压电式传感器实现结构声源控制[J]. *压电与声光*, 2003, 25(2): 112-117  
MAO Qibo, XU Boling. Active structural acoustic control using piezoelectric sensors [J]. *Piezoelectrics & Acoustooptics*, 2003, 25(2): 112-117.

[14] 丁晓红, 郭春星, 季学荣. 基于自适应成长原理的板壳结构加强筋分布设计技术[J]. *工程设计学报*, 2012, 19(2): 118-122  
DING Xiaohong, GUO Chunxing, JI Xuerong. Stiffener layout design technique of plate structures based on adaptive growth mechanism[J]. *Chinese Journal of Engineering Design*, 2012, 19(2): 118-122.