

基于材料疲劳的压电俘能器结构设计

陈林雄,高世桥,董新博

(北京理工大学 爆炸科学与技术国家重点实验室,北京 100081)

摘要:现有的压电俘能器是通过增加振幅来提高俘能器的输出功率,但这种方法增加了压电材料的疲劳负担,使锆钛酸铅压电陶瓷(PZT)表面产生裂纹并迅速扩展,这使得整个俘能器的固有频率显著降低,对于俘能带宽本就窄的压电俘能器来说无疑是毁灭性的。该文通过线性弹簧来拟合 PZT 的表面裂纹,建立了等效模型并推导出表面裂纹对结构固有频率影响的理论公式。理论推导得到了裂纹不扩展时的压电俘能器结构与环境的限制条件,并通过实验进行了验证。实验结果表明,当俘能器的振幅小于外加电场为 1.5 倍矫顽电场所等效的振幅时,系统的固有频率几乎不发生改变;而当俘能器的振幅大于此等效振幅时,系统的固有频率明显降低,而且振幅越大,下降速度越明显。

关键词:压电;俘能器;疲劳;裂纹;矫顽电场;固有频率;振幅

中图分类号:TN384;TP212 **文献标识码:**A

Structure Design of Piezoelectric Harvester Based on Material Fatigue

CHEN Linxiong, GAO Shiqiao, DONG Xinbo

(State Key Lab. of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: In recent research about piezoelectric energy harvester, increasing the amplitude is usually used to improve its output power. But this approach will greatly increase the fatigue burden of the piezoelectric material and make the PZT material surface cracks and rapidly expand, which results in a significant reduction in the natural frequency of the energy harvester. It is undoubtedly devastating for the piezoelectric energy harvester with a narrow bandwidth. The surface cracks of PZT are fitted by linear spring, the equivalent model is established and the theory formula about the effect the surface cracks on the natural frequencies is derived. The limiting conditions of the structure and environment of the piezoelectric energy harvester are obtained when the crack is not expanded and some experiments are carried out to prove the theory. The results show that the natural frequency of the system will almost not change when its amplitude is less than the equivalent amplitude of 1.5 times the coercive electric field, and the natural frequency will decreased significantly when its amplitude is greater than the equivalent amplitude, and the greater the amplitude, the more obvious the decrease speed of the cracks extension.

Key words: piezoelectric; energy harvester; fatigue; cracks; coercive electric field; natural frequency; amplitude

0 引言

随着世界的电子化、微小化,传感器已成为人们不可或缺的元器件,特别是微小型传感器中压电陶瓷被广泛使用,大部分传感器都是用压电陶瓷将目的信号转换为更易于测量的电信号输出。压电俘能器作为微小型传感器在无源无线环境下供电的一种解决方案,也逐渐成为学术界最热门的研究方向之一^[1]。

压电俘能器的研究方向可以分为两类,即

1) 提高俘能器的输出功率^[2]。

2) 提高俘能带宽^[3]。

作为提高俘能器输出功率最有效的方法之一,提高俘能器的输出电压由于易实现被广泛应用。而提高输出电压最有效的手段是提高压电俘能器的振幅,并且这种在压电界已被认同和广泛应用。但却忽略了提高振幅给压电陶瓷带来的疲劳压力:由于压电俘能器中压电陶瓷处于高频交变载荷的环境中,表面存在很多缺陷的压电陶瓷本身就有很高的疲劳风险^[4],而提高振幅加速了表面裂纹的生成与

收稿日期:2016-06-20

基金项目:国家高技术研究发展计划(“八六三”计划)基金资助项目

作者简介:陈林雄(1990-),男,湖北武汉人,硕士生,主要从事俘能器的研究。通信作者:高世桥(1961-),男,北京人,教授,主要从事微机电技术的研究。

扩展,使压电陶瓷提前疲劳老化。并且这个还不是压电俘能器最致命的。由于表面裂纹的生成与扩展,导致压电陶瓷的刚度变小,从而使整个压电俘能器的固有频率降低,这个对于俘能带宽只有几赫兹的俘能器是毁灭性的。因此,在设计压电俘能器的结构时,压电陶瓷的疲劳问题必须放在第一位考虑,不能仅提高振幅来提升俘能器的输出电压。

1 理论推导

1.1 裂纹大小与固有频率的关系

以最常见的单晶悬臂梁压电俘能器为例,其结构模型如图 1 所示。

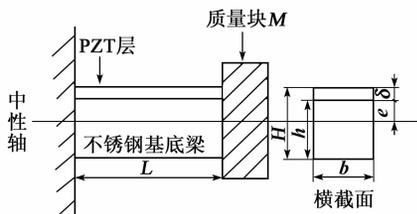


图 1 压电俘能器结构模型

$$YI = \frac{b[Y_s(h^3 - 3h^2e + 3he^2) + Y_p^*(\delta^3 + 3\delta^2e + 3\delta e^2)]}{3} \tag{3}$$

当 PZT 表面产生裂纹,假设裂纹产生在端部(应变最大处),那么整个结构的几何模型如图 2(a) 所示,图中, a 为表面裂纹的深度。

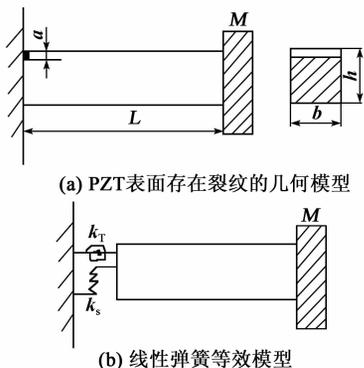


图 2 压电俘能结构的力学模型

根据 Rice 和 Levy 的理论^[5],裂纹可等效为一个线性弹簧,其柔度与裂纹梁的柔度一致,那么上述端部裂纹在梁弯曲振动时可等效为一个扭转弹簧和一个剪切弹簧,其等效模型如图 2(b) 所示。

刘文光博士^[6]根据经验公式^[7]给出了两个弹簧的柔度表达式:

$$\frac{1}{k_T} = \frac{72\pi}{bh^2Y_p} (0.6290\xi^2 - 1.047\xi^3 + 4.602\xi^4 - 9.975\xi^5 + 20.295\xi^6 - 32.993\xi^7 + 47.041\xi^8 - 40.693\xi^9 + 19.6\xi^{10}) \tag{4}$$

图 1 中, L, h, b 分别为基底梁的长度、厚度和宽度, δ 为 PZT 压电陶瓷的厚度, H 为基底梁与压电陶瓷的总厚度, e 为整个悬臂梁结构的中性轴位置, M 为质量块的质量。

根据《微振动俘能技术》中的定义,可以得到锆钛酸铅压电陶瓷(PZT)材料在逆压电效应的影响下的等效弹性模量为

$$Y_p^* = Y_p \left(1 - \frac{d_{31}^2 Y_p}{\epsilon_{33}^S}\right) \tag{1}$$

式中: Y_p^* 为等效弹性模量; Y_p 为 PZT 材料的弹性模量; ε₃₃^S 为无应变变形时的绝对介电常数; d₃₁ 为压电矩阵中的一个系数。

通过中性轴处应变为 0, 可以解出中性轴位置:

$$e = \frac{Y_s h^2 - Y_p^* \delta^2}{2(Y_p^* \delta + Y_s h)} \tag{2}$$

式中 Y_s 为不锈钢基底梁的弹性模量。

通过材料力学中对复合悬臂梁的等效弯曲刚度的算法可以算出图 1 结构的等效弯曲刚度为

$$\frac{1}{k_s} = \frac{2\pi}{bY_p} (-0.682\ln(1-\xi) - 0.682\xi + 0.288\xi^2 - 0.227\xi^3 - 0.044\xi^4 + 0.026\xi^5 - 0.011\xi^6 - 0.0046\xi^7) \tag{5}$$

式中: k_T 为扭转弹簧刚度; k_s 为剪切弹簧刚度; ξ = a/h 为相对裂纹深度; 由于经验公式在相对裂纹深度为 [0, 0.5] 范围内的误差较小, 经验公式较准确, 且当 a > δ 时, PZT 层断裂, 俘能器破坏。因此, 本文只考虑 ξ ∈ [0, 0.5] 范围内的裂纹。那么整个模型的自由振动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[YI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \frac{m}{L} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

式中: w(x, t) 为振型函数; m 为悬臂梁的质量(不含质量块)。

边界条件为

$$\begin{cases} YI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = k_T \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ YI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = k_s w \Big|_{x=0} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = -\alpha \beta^4 L w \Big|_{x=L} \end{cases} \tag{7}$$

式中 α = M/m 为质量块与梁质量之比; 为了简化公

式,由 $\beta^4 L = \frac{m\omega^2}{YI}$ 定义式中的 β 。

解出式(6)在边界条件(7)下的解,可得整个模型的频率方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha(YI)^2 \beta^5 L}{k_T k_s} [\cos(\beta L) \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) \cosh(\beta L)] + \\ & \frac{(YI)^2 \beta^4}{k_T k_s} [\cos(\beta L) \cosh(\beta L) - 1] + \\ & \frac{2\alpha YI \beta^4 L}{k_s} \cos(\beta L) \cosh(\beta L) + \\ & \frac{YI \beta^3}{k_s} [\cos(\beta L) \sinh(\beta L) + \sin(\beta L) \cosh(\beta L)] - \\ & \frac{2\alpha YI \beta^2 L}{k_T} \sin(\beta L) \sinh(\beta L) + \\ & \alpha \beta L [\cos(\beta L) \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) \cosh(\beta L)] + \\ & \frac{YI \beta}{k_T} [\cos(\beta L) \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) \cosh(\beta L)] + \\ & \cos(\beta L) \cosh(\beta L) + 1 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

而整个模型的固有频率 ω_i 为

$$\omega_i = (\beta_i L)^2 \sqrt{\frac{YI}{L^3 m}} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

由于压电俘能器工作环境一般处于一阶固有频率附近,因此,对于式(9)只考虑 $i=1$ 即一阶固有频率。

当 PZT 表面无裂纹时,即 $\xi = 0$ 时,式(8)可简化为

$$\alpha \beta L [\cos(\beta L) \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) \cosh(\beta L)] + \cos(\beta L) \cosh(\beta L) + 1 = 0 \quad (10)$$

将式(4)、(5)代入式(8),并对式(8)进行数值计算,代入本实验室的压电俘能器的 $\alpha = 5.04$, $m = 1.95 \text{ g}$,可以得到无裂纹时的一阶固有频率:

$$\omega_1' = (\beta_1 L) \sqrt{\frac{YI}{L^3 m}} \approx (0.8690)^2 \sqrt{\frac{YI}{L^3 m}} \quad (11)$$

以式(11)为基准,即可求得整个模型无量纲化的一阶固有频率与 ξ 的关系曲线,如图 3 所示。

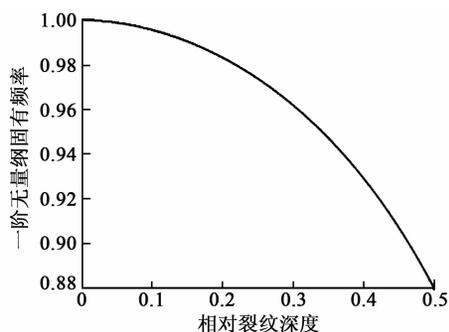


图 3 ξ 与无量纲固有频率的关系曲线

由图 3 可知,压电俘能结构的一阶固有频率随

着表面裂纹的扩展下降速度逐渐变快,在 $\xi=0.5$ 时,一阶固有频率下降了 13%。以 Chen^[2] 的压电俘能器为例,其俘能器的俘能频率为 33 Hz,带宽为 31.5~35 Hz, $\xi=0.5$ 时,其结构的固有频率下降为 28.7 Hz,已经超过了俘能带宽的最低值,即其结构已失效。事实上,从图 3 可看出,当 $\xi=0.3$ 时,其一阶固有频率小于 31.5 Hz。由此可见,PZT 陶瓷的表面裂纹对压电俘能器的影响很明显,在俘能器的结构设计中占有绝对重要的地位。

1.2 PZT 陶瓷表面裂纹的扩展

Lynch^[8] 和杨先生^[9] 给出了一种交变电场下裂纹循环扩展的力学模型,该模型给出了压电陶瓷的裂纹顶端应力强度因子:

$$K_{I_1} \approx 0.23 K_E Y_p \gamma_s / E_c \quad (12)$$

式中: $K_E = \sqrt{\frac{2}{\delta}} V$ 为电场强度因子, V 为压电陶瓷两端的电势差; γ_s 为畴变半径(90°畴变时 $\gamma_s=0.01$, 180°畴变时 $\gamma_s=0.002$); E_c 为压电陶瓷的矫顽电场。

将式(12)代入文献[9]中对裂纹扩展速率的理论公式可得,当外加电场超过临界值时,裂纹的扩展速率为

$$\frac{da}{dN} \approx \frac{9\pi}{32(1+q)^2} \left(0.23 \frac{K_E}{E_c} - \frac{K_{I_c}}{Y_p \gamma_s} \right)^2 \quad (13)$$

式中: q 为压电陶瓷的电泊松比; K_{I_c} 为裂纹扩展的临界应力强度因子。

Weitzing^[10] 和 Nuffer^[11] 通过大量实验得出结论:对于 $\text{Pb}(\text{Ni}_{1/3}\text{Sb}_{2/3})\text{O}_3\text{-PbTiO}_3\text{-PbZrO}_3$ 压电材料,当外加电场 $E < 1.5E_c$ 时,压电陶瓷表面裂纹不易扩展;而当 $E \geq 1.5E_c$ 时,压电陶瓷表面裂纹扩展迅速。

那么,通过他们的实验结果,将 $E = V/\delta = 1.5E_c$ 代入式(12),可以求得裂纹扩展的临界应力强度因子:

$$K_{I_c} \approx 0.345 \sqrt{2\delta} Y_p \gamma_s \quad (14)$$

将式(14)代入式(13)中,裂纹扩展速率可化简为

$$\frac{da}{dN} \approx \frac{0.029}{(1+q)^2} \frac{8\pi\delta}{E_c} \left(\frac{E}{E_c} - 1.5 \right)^2 \quad (15)$$

通过式(15)可计算出 $E > 1.5E_c$ 时裂纹扩展的速度,再结合式(8)即能拟合出结构固有频率随振动次数的关系曲线。

1.3 正、逆压电效应转换

根据第 1.2 节,以 $E = V/\delta = 1.5E_c$ 为压电陶瓷的极限载荷,则在此电场强度下 PZT 表面的电位

移 D 为

$$D = \epsilon_{33}^S E = 1.5 \epsilon_{33}^S E_c \tag{16}$$

通过材料力学挠度公式可计算出悬臂梁结构产生的最大挠度 z_{max} 为

$$z_{max} = \frac{\mu M a_M}{\sqrt{[K - M\omega^2 + \frac{\omega^2 R_p^2 \theta^2 C_p}{1 + (\omega C_p R_p)^2}]^2 + \omega^2 [c_m + \frac{\theta^2 R_p}{1 + (\omega C_p R_p)^2}]^2}} \tag{18}$$

式中： μ 为机电耦合系数； a_M 为加速度幅值； K 为悬臂梁的刚度； ω 为系统的固有频率（处于一阶谐振状态下）； c_m 为梁的机械阻尼； R_p 、 C_p 分别为 PZT 的等效内阻和等效电容； $\theta = -\frac{d_{31} b Y_p^*}{2\delta L} [(\delta + e)^2 - e^2]$ 为压电层作用力与端电压的比值。

从式(18)可看出，当压电俘能器的结构确定后，其最大振幅正比于加速度的幅值，为了便于实验，我们可通过控制加速度的幅值来控制俘能器的最大振幅。

若压电陶瓷在正、逆压电效应时所处的力学环境相同，故我们可以假设其点疲劳状态也应相同，则上述最大挠度与最大振幅应相等，即

$$\omega_{max} = z_{max} \tag{19}$$

以式(18)确定压电俘能器的临界条件，然后通过式(17)来控制设计压电俘能器的结构参数，使得压电俘能器 PZT 表面裂纹扩展速率很小甚至是不扩展。

2 实验

通过实验分别测得压电俘能器在加速度幅值为 2 m/s²、4 m/s²、6 m/s² 时固有频率随循环加载次数的关系曲线，来分析加速度幅值对压电俘能器固有频率的影响。实验系统搭建如图 4 所示。



图 4 实验系统

俘能器的材料参数及结构尺寸如表 1、2 所示。PZT 材料的压电参数 $d_{31} = -274 \times 10^{-12}$ C/N, $\epsilon_{33}^S = 30.1 \times 10^{-9}$ F/m。

表 1 俘能器的材料参数

材料	密度/(kg/m ³)	弹性模量/Pa	泊松比
PZT	7 700	60 × 10 ⁹	0.3
不锈钢	7 850	200 × 10 ⁹	0.3

$$\omega_{max} = \frac{DL}{3(\delta + e)} \tag{17}$$

根据文献[12]可知，压电俘能器的最大振幅 z_{max} 为

表 2 结构尺寸

压电俘能器	长/mm	宽/mm	厚/mm
PZT	20	25	0.2
不锈钢梁	20	25	0.3
质量块	10	25	5.0

本实验测得的固有频率随循环加载次数的关系曲线如图 5 所示。

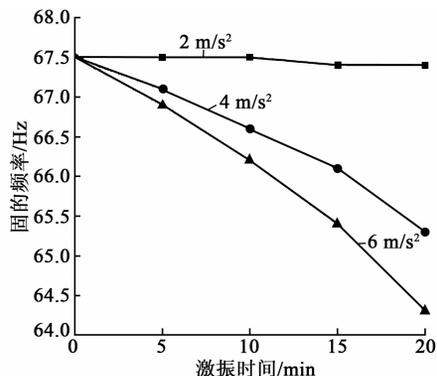


图 5 固有频率随激振时间的变化关系

由图 5 可知，当激振加速度为 2 m/s² 时，俘能器的固有频率几乎无变化；而当激振加速度为 4 m/s² 时，俘能器的固有评论随激振时间而减小，并且当激振加速度为 6 m/s² 时，固有频率减小速度更快。通过计算，加速度为 2 m/s² 时的振幅与外加电场为 1.5E_c 时的振幅等效，加速度为 4 m/s² 时等效电场为 1.55E_c，加速度为 6 m/s² 时等效电场为 1.5E_c。

3 结论

本文从压电陶瓷的电疲劳来分析压电俘能器的结构设计，并进行了理论公式的推导与实验的验证，得到以下结论：

- 1) 压电陶瓷表面易产生裂纹，且随着裂纹的产生与扩展，压电俘能器的固有频率会随之减小。
- 2) 为避免裂纹的扩展，压电俘能器的振幅有一个限度为 1.5 倍矫顽电场等效振幅，当振幅超过这个限度时，压电俘能器的固有频率随着激振时间的增加而显著减小，且振幅越大固有频率的减小速度越快。

参考文献：

[1] ZHU L, XU C D, REN B, et al. Optimization of cantile-

- vered piezoelectric energy harvester with a fixed resonance frequency[J]. *Science China Technological Sciences*, 2014, 57(6):1093-1100.
- [2] CHEN Z S, YANG Y M, DENG G Q. Analytical and experimental study on vibration energy harvesting behaviors of piezoelectric cantilevers with different geometries[C]//S. I.: International Conference on Sustainable Power Generation and Supply, 2009:1-6.
- [3] HAN M D, ZHANG X S, LIU W, et al. Low-frequency wide-band hybrid energy harvester based on piezoelectric and triboelectric mechanism [J]. *Science China Technological Sciences*, 2013, 56(8):1835-1841.
- [4] 陈志武, 程璇, 张颖. 铁电陶瓷材料在交变电场作用下疲劳研究进展[J]. *稀有金属材料与工程*, 2004, 33(7): 673-678.
- [5] RICE J R, LEVY N. The Part-through surface crack in an elastic plate [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1971, 39(1): 185-194.
- [6] 刘文光. 结构共振疲劳试验及裂纹构件的振动疲劳耦合分析[D]. 南京:南京航空航天大学, 2010.
- [7] TADA H. The stress analysis of cracks handbook, 1973[J]. *Stress Analysis of Cracks Handbook*, 1973, 91(181):614.
- [8] LYNCH C S, CHEN L, SUO Z, et al. Crack growth in ferroelectric ceramics driven by cyclic polarization switching[J]. *Journal of Intelligent Material Systems & Structures*, 1995, 6(6):191-198.
- [9] 杨卫. 电致失效力学[J]. *力学进展*, 1996, 26(3): 338-352.
- [10] WEITZING H, SCHNEIDER G A, STEFFENS J, et al. Cyclic fatigue due to electric loading in ferroelectric ceramics[J]. *Journal of the European Ceramic Society*, 1999, 19(6):1333-1337.
- [11] NUFFER J, LUPASCU D C, RÖDEL J. Damage evolution in ferroelectric PZT induced by bipolar electric cycling[J]. *Acta Materialia*, 2000, 48(14):3783-3794.
- [12] 蔡华通, 高世桥, 李平, 等. 压电-电磁复合式俘能器的设计与实验研究[J]. *压电与声光*, 2015, 37(2):248-253.
- CAI Huatong, GAO Shiqiao, LI Ping, et al. Design and experimental study of hybrid piezoelectric and electromagnetic[J]. *Piezoelectrics & Acoustooptics*, 2015, 37(2):248-253.
-
- (上接第 538 页)
- HAN Kewu, YANG Minghui, SUN Yun, et al. Millimeter-wave vector modulator and its application in active phased array antenna[J]. *Journal of Infrared and Millimeter Waves*, 2011, 30(5):425-428.
- [5] CHONGCHEAWCHAMNAN M, BUNNJAWHEHT S, KPOGLA D, et al. Microwave vector modulator using a simple technique for compensation of FET parasitics[J]. *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 2002, 50(6):1642-1646.
- [6] 黎剑, 蓝永海, 李大光, 等. 矢量调制器研究及干扰抵消其改进[J]. *通信对抗*, 2009(3):58-61.
- LI Jian, LAN Yonghai, LI Daguang, et al. Research on vector modulator and improvement of interference canceller[J]. *Communication Countermeasures*, 2009(3): 58-61.
- [7] 姚中兴, 李华树, 任桂兴. 通信自适应干扰抵消系统的性能分析[J]. *西安电子科技大学学报*, 1995, 22(3): 256-261.
- YAO Zhongxing, LI Huashu, REN Guixing. The performance analysis of adaptive interference cancellation system[J]. *Journal of Xidian University*, 1995, 22(3): 256-261.
- [8] 郑伟强, 杜武林. 自适应干扰抵消研究[J]. *电讯技术*, 1991, 31(6):20-27.
- ZHEN Weiqiang, DU Wulin. Research on adaptive interference cancellation [J]. *Telecommunication Engineering*, 1991, 31(6):20-27.
- [9] 郇舟剑, 王东进. 毫米波连续波雷达载波泄漏对消一理论分析与系统仿真[J]. *现代雷达*, 1998, 20(2):1-11.
- LI Zhoujian, WANG Dongjin. Carrier feed-through nulling in millimeter wave continuous wave radar-theoretical analysis and system simulation[J]. *Modern Radar*, 1998, 20(2):1-11.
- [10] 赖鑫. 射频干扰对消技术的系统设计与仿真分析[J]. *电讯技术*, 2013, 53(3): 259-264.
- LAI Xin. System design and simulation analysis of RF interference cancellation technology[J]. *Telecommunication Engineering*, 2013, 53(3):259-264.
- [11] 白菊容. Pin 二极管 π 型电调衰减器的设计[J]. *广西民族学院学报(自然科学版)*, 2005, 11(3):74-76.
- BAI Jurong. Design of π type electronic attenuator of PIN diode[J]. *Journal of Guangxi University for Nationalities (Natural Science Edition)*, 2005, 11(3): 74-76.
- [12] 牛伟, 方鑫, 叶峰, 等. 一种数字矢量调制器设计与实现[J]. *压电与声光*, 2014, 36(2):190-193.
- NIU Wei, FANG Xin, YE Feng, et al. Design and implementation of a digital vector modulator[J]. *Piezoelectrics & Acoustooptics*, 2014, 36(2):190-193.