

# 盘形谐振陀螺的机械灵敏度仿真优化

向磊<sup>1,3</sup>,周鑫<sup>2</sup>,许一<sup>2</sup>

(1. 湖南汽车工程职业学院,湖南 株洲 412001;2. 国防科学技术大学 机电工程与自动化学院,湖南 长沙 410073;

3. 华中科技大学 计算机科学与技术学院,湖北 武汉 430074)

**摘要:**针对盘形谐振陀螺的机械灵敏度这一关键性能,采用结构优化法对盘形谐振陀螺的谐振环壁厚分布进行了优化。首先基于 COMSOL with MATALB 实现了盘形谐振陀螺品质因数  $Q$ 、谐振频率  $f_0$ 、等效质量  $m_{\text{eff}}$  和角度增益  $A_g$  的有效计算,估算出了盘形谐振陀螺的机械灵敏度;然后以机械灵敏度为优化目标,采用移动渐近线法对盘形谐振子的谐振环壁厚分布进行了优化。壁厚分布优化使陀螺的机械灵敏度提升了 20%。

**关键词:**COMSOL;移动渐近线法;结构优化;盘形谐振陀螺;机械灵敏度

**中图分类号:**TM743;TH162.1 **文献标识码:**A

## Simulation Optimization of Mechanical Sensitivity of Disc Resonant Gyroscope

XIANG Lei<sup>1,3</sup>, ZHOU Xin<sup>2</sup>, XU Yi<sup>2</sup>

(1. Hunan Automobile Engineering Professional College, Zhuzhou 412001, China;

2. College of Mechatronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

3. School of Computer Science and Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** This paper presents a mechanical sensitivity improvement of the disc resonating gyroscope by optimizing the allocation of the resonant ring wall thickness by using structural optimization method. First, the quality-factor, resonating frequency, effective mass, and angular gain of the disc resonating gyroscope are calculated based on COMSOL with MATALB. Then the mechanical sensitivity is estimated. The mechanical sensitivity is treated as the objective, and the method of moving asymptotes is implemented to optimize the allocation the resonant ring wall thickness. The result indicates that the mechanical sensitivity has been increased by 20% through optimizing the allocation of the wall thickness.

**Key words:** COMSOL; method of moving asymptotes; structural optimization; disc resonating gyroscope; mechanical sensitivity

## 0 引言

固体波动陀螺是一种高性能的振动陀螺,它具有精度高,体积小,抗冲击和寿命长等优点<sup>[1-3]</sup>。在所有微机电系统(MEMS)固体波动陀螺中,最具潜力的是 MEMS 盘形谐振陀螺<sup>[4-5]</sup>。MEMS 盘形谐振陀螺由同心嵌套的多个谐振环构成,谐振结构通过中心的锚点支撑,环与环之间的间隙用于布置差分式电容式电极。MEMS 盘形谐振陀螺具有支撑损耗低,谐振质量大,电极数目多及电容面积大等优势。但与传统陀螺仪相比,目前 MEMS 陀螺仪的精度还不高,主要受制于体积减小带来的灵敏度降低。通过结构优化法来提升 MEMS 谐振陀螺的机械灵敏度,对于提升 MEMS 陀螺的总体性能,具

有重要作用。本文主要采用移动渐近线法(MMA)对 MEMS 盘形谐振陀螺的多个谐振环的壁厚分布进行灵敏度优化。

## 1 基本理论

### 1.1 盘形谐振陀螺的机械灵敏度

MEMS 盘形谐振陀螺的结构如图 1(a)所示,该结构充分利用了结构面积,显著增大了惯性质量和电极数量;其振型的对称性显著降低了支撑损耗;衬底与结构都为硅材料,故热失配很小;数目众多的内置电极可以实现结构的精密修调和参数激励。因此, MEMS 盘形谐振陀螺表现出了很高的性能潜力。盘形谐振陀螺工作在二阶酒杯形模态,如图 1(b)所示。首先,在驱动电极上施加交变驱动电

压,在静电力的作用下,谐振环产生形变振动,此为驱动模态。当有旋转角速度  $\Omega$  输入时,科里奥利力诱导谐振环检测模态的振动,其振幅正比于  $\Omega$ 。

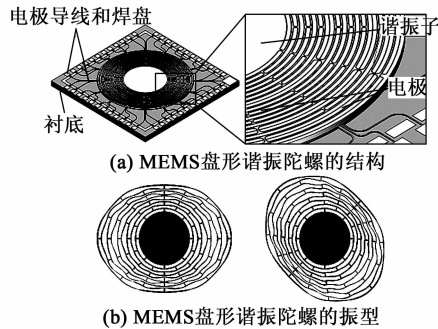


图1 盘形谐振陀螺的结构及振型

盘形谐振陀螺的简化二阶动力学模型可由如下方程组描述<sup>[4]</sup>:

$$\begin{cases} m_{\text{eff}}\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\sin(\omega t) \\ m_{\text{eff}}\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 2m_{\text{cor}}\Omega\dot{x} \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $m_{\text{eff}}$ 、 $c$ 、 $k$  分别为谐振子的等效质量、等效阻尼和等效刚度;  $F$  为由所施加电压产生的静电力;  $m_{\text{cor}}$  为 Coriolis 质量,且有  $m_{\text{cor}} = 2m_{\text{eff}}A_g$ ,  $A_g$  为角度增益的比例常数,对于盘形谐振陀螺,通常  $A_g \approx 0.4$ 。

通过求解式(1)可得到盘形谐振陀螺的机械灵敏度为

$$S_{\text{mech}} = \frac{4A_g F Q^2}{(2\pi f_0)^3 m_{\text{eff}}} \quad (2)$$

式中:  $f_0$  为谐振频率;  $Q$  为品质因数。

## 1.2 移动渐近线法

目前,多变量隐式非线性优化问题最常采用的方法是 MMA,该算法最早是由 Svanberg 于 1987 年提出的。MMA 是一种序列近似规划方法,其思想主要是将隐式优化问题转化为一组更简单的显式可分离的近似数学规划子问题。我们特别希望这些数学规划子问题都是凸规划,因为凸规划具有一项很好的性质:局部最小值即是全局最小值。

MMA 通过引入移动渐近线对结构的响应函数作一阶倒变量的泰勒展开,并实施凸线性规划将隐式问题显式化近似;这样原问题分离成一系列更为简单的严格凸的显式子优化问题;最后将子问题的解不断逼近最终解<sup>[6]</sup>。

## 2 参数计算

由式(2)可知,由于不考虑驱动力的影响,不妨设驱动力为 1 N,还需要通过有限元仿真或理论计算  $Q$ 、 $f_0$ 、 $m_{\text{eff}}$  和  $A_g$ ,才能最终计算出机械灵敏度。

其中最重要的一项是估算  $Q$ 。对于盘形谐振陀

螺而言,影响最大的阻尼因素有热弹性阻尼和空气阻尼,这两项因素引起的热弹性品质因数  $Q_{\text{TED}}$  和空气阻尼品质因数  $Q_{\text{air}}$  都在  $2 \times 10^5$  以内,其中空气阻尼以压膜阻尼为主。与这两项相比,其他阻尼影响较小,记其他因素引起的品质因数为  $Q_{\text{other}}$ 。通过文献[4]报道可知,对于嵌套环式谐振子而言, $Q_{\text{other}}$  是  $Q_{\text{TED}}$  和  $Q_{\text{air}}$  的数倍乃至数十倍,不妨将其设为定值(约为  $5 \times 10^5$ )。由

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{\text{TED}}} + \frac{1}{Q_{\text{air}}} + \frac{1}{Q_{\text{other}}} \quad (3)$$

即可计算品质因数。再通过 COMSOL 有限元仿真可计算得出  $Q_{\text{TED}}$ ;通过理论推导可实现对  $Q_{\text{air}}$  的估计。

### 2.1 仿真计算 $Q_{\text{TED}}$ 和 $f_0$

计算采用的模型为带有 9 个谐振环的盘形谐振子,中心锚点的直径为  $\varnothing 3.5$  mm,锚点与嵌套环及嵌套环之间间隔  $240 \mu\text{m}$ ,谐振子总体厚为  $300 \mu\text{m}$ ,辐射状支撑短梁厚为  $40 \mu\text{m}$ ,各谐振环的壁厚在仿真中处于可变,初始都设定为  $20 \mu\text{m}$ 。

采用 COMSOL 的热弹性阻尼模块计算盘形谐振子的  $Q_{\text{TED}}$ <sup>[7-9]</sup>。热弹性阻尼分析以模态仿真的形式进行,可同时得到谐振子各个模态的谐振频率。典型盘形谐振子的热弹性阻尼仿真结果如表 1 所示。

表1 COMSOL 热弹性阻尼仿真结果

阶数	谐振频率/Hz	热弹性品质因子
1	11 615	81 471
2	11 765	57 147
3	11 765	57 147
4	11 882	83 431
5	11 882	83 431
6	14 617	72 343
7	14 617	72 343
8	16 179	65 847
9	18 272	60 992
10	18 272	60 992
11	19 617	180 488
12	19 617	180 488

### 2.2 理论估算 $Q_{\text{air}}$

假设盘形谐振子采用真空封装,气压为 10 Pa。由结构特性可知,嵌套环谐振子所受阻尼主要是压膜空气阻尼。低真空下压膜空气阻尼<sup>[10]</sup>为

$$Q_{\text{air}} = (2\pi)^{\frac{3}{2}} m_{\text{eff}} \omega_0 \left( \frac{d_0}{L} \right) \sqrt{\frac{RT}{M_m}} \frac{1}{PA} \quad (4)$$

式中:  $M_m$  为气体(平均)摩尔质量,空气取值  $29 \text{ g/mol}$ ;  $R$  为气体摩尔常数 ( $8.314 \times 10^3 \text{ J/K}$ );  $T$

为绝对温度;  $\omega_0 = 2\pi f_0$  为振动频率;  $d_0 = 20 \mu\text{m}$  为压缩面之间的间隙;  $P = 10 \text{ Pa}$  为压力;  $A = L \times h_0$  为压缩面面积,  $h_0 = 300 \mu\text{m}$  为谐振子厚度;  $L$  为压缩面长度。

对于盘形谐振子而言, 结构较复杂, 不是直观的平面之间的压缩。总体而言, 参与压缩的面是谐振环的侧面, 需要根据嵌套环侧面的总长度  $L_0$  估算出  $L$ 。由于  $n = 2$  模态的波节点处平均位移为 0, 故不是所有的侧面都参与压缩, 因此, 需要在侧面长度  $L_0$  上乘以一个小于 1 的系数  $k_1$ 。另外, 9 个谐振环越靠近锚点, 振动位移越小, 小幅振动梁应该等效成更小的压缩长度, 因此, 压缩长度应该在  $k_1 L_0$  上再乘以一个小于 1 的系数  $k_2$ 。综上有

$$L = k_1 k_2 2\pi \sum_{i=1}^9 r_i \quad (5)$$

式中  $r_i$  为第  $i$  个环的半径。将  $L$  和其余常值参数代入(4)中, 可以估算仿真采用的嵌套环谐振子的  $Q_{\text{air}}$  约为  $(1.2 \sim 1.5) \times 10^5$ 。

### 2.3 仿真计算 $m_{\text{eff}}$ 和 $A_g$

盘形谐振子在  $n = 2$  模态下的振型函数  $(\phi_{x1}, \phi_{y1}, \phi_{z1}, \phi_{x2}, \phi_{y2}, \phi_{z2})$ ,  $m_{\text{eff}}$  和  $A_g$  可以表示<sup>[5-6]</sup>为

$$m_{\text{eff}} = \iiint_V \rho(\phi_{x1}^2 + \phi_{y1}^2 + \phi_{z1}^2) dV \quad (6)$$

$$A_g = \frac{\iiint_V \rho(\phi_{x1}^2 \phi_{y2}^2 + \phi_{x2}^2 \phi_{y1}^2) dV}{m_{\text{eff}}} \quad (7)$$

首先, 通过模态分析法得出盘形谐振子的工作模态振型, 再利用 Comsol 和 Matlab 联合仿真提取出工作模态振型上所有节点的位移, 之后提取所有单元的节点编号, 最后通过节点平均法计算得出所有单元的位移。模态 1、2 所有单元的位移构成的列向量  $\text{disp}_1$ 、 $\text{disp}_2$ , 所有单元在笛卡尔坐标系下的位移分量构成的矩阵  $[u_1, v_1, w_1]$ 、 $[u_2, v_2, w_2]$ 。通过在位移向量  $\text{disp}_1$ 、 $\text{disp}_2$  的元素中取最大值得到模态 1、2 的波腹点位移  $q_1$  和  $q_2$ 。

首先计算  $m_{\text{eff}}$ , 由式(6)可知

$$m_{\text{eff}} = \iiint_V \rho(\phi_{x1}^2 + \phi_{y1}^2 + \phi_{z1}^2) dV = \frac{\rho}{q_1^2} \iiint_V (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) dV \quad (8)$$

其中  $\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2} = \text{disp}_1$ , 则有

$$m_{\text{eff}} = \frac{\rho}{q_1^2} [\text{diag}(\text{disp}_1 \quad \text{diap}_1^T)]^T \delta V \quad (9)$$

然后计算  $A_g$ , 由式(7)可知

$$A_g = \frac{2\rho \sum_{i=1}^N [u_1(i)v_2(i)\delta V(i)]}{m_{\text{eff}}} \quad (10)$$

提取每个网格单元的体积, 保存为列向量  $\delta V$ , 由式(10)可知

$$A_g = \frac{2\rho [\text{diag}(u_1 \quad v_2^T)]^T \delta V}{m_{\text{eff}}} \quad (11)$$

通过仿真计算得到 9 个环的嵌套环式谐振子的  $A_g$  值约为 0.392~0.393(谐振环壁厚对于  $A_g$  值有轻微影响)。

## 3 盘形谐振陀螺的壁厚分布优化

### 3.1 目标函数程序

本研究已实现了一次模态仿真计算出谐振频率  $f_0$ 、 $Q_{\text{TED}}$ 、 $m_{\text{eff}}$ 、 $A_g$ ; 采用 Comsol 和 Matlab 联合仿真能够实现以上仿真, 而且可以将估算  $Q_{\text{air}}$  的 MATLAB 代码嵌入到以上仿真代码中, 最后将代码封装成一个计算机灵敏度  $S_{\text{mech}}$  的 Obj 函数:  $[f_0, Q_{\text{TED}}, Q_{\text{air}}, m_{\text{eff}}, m_{\text{cor}}, A_g, S_{\text{mech}}] = \text{Obj}(\mathbf{a}, \text{eigfreq})$ 。Obj 函数的输入为:

1) 含有 9 个元素的向量  $\mathbf{a}$ , 元素  $a(i)$  对应于第  $i$  个谐振环的壁厚数值,  $1 \leq i \leq 9$ , 越靠外的谐振环  $i$  值越大。

2) 模态仿真的中心频率 eigfreq, Comsol 的模态仿真频率段在中心频率附近。要求中心频率越靠近工作模态频率越好, 如果中心频率偏离工作模态谐振频率太远, 有可能仿真得不到工作模态。

### 3.2 优化流程

采盘形谐振子壁厚分布优化可以描述为: 寻找最优的谐振环壁厚分布向量  $\mathbf{a} = [t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9]$ , 使得谐振子  $S_{\text{mech}}$  值达到最大, 同时保证  $f_0 > 5000 \text{ Hz}$  (抗外界干扰的考虑), 且所有谐振环壁厚取值范围都是  $[20 \mu\text{m}, 50 \mu\text{m}]$  (微制造可行性的考虑)。数学描述为

$$\begin{cases} \min & -S_{\text{mech}}(\mathbf{a}) \\ \text{s. t.} & 5000 - f_0(\mathbf{a}) \leq 0 \\ & 20 \leq a(i) \leq 50 \quad i = 1, 2, \dots, 9 \end{cases} \quad (12)$$

式中  $S_{\text{mech}}$  和  $f_0$  是  $\mathbf{a}$  的隐式非线性函数, 且  $\mathbf{a}$  有 9 个元素。整个优化流程如图 2 所示, 即定义设计变量初始值、有限元分析、计算目标函数和约束函数对单元密度设计变量的灵敏度。接着将计算结果送入优化求解器。求解器采用 MMA 法。通过迭代有限元分析、灵敏度分析和 MMA 优化求解, 实现谐振环壁厚分布的不断更新。当相邻两次迭代结果的差

距小于阈值时,终止迭代并输出结果。

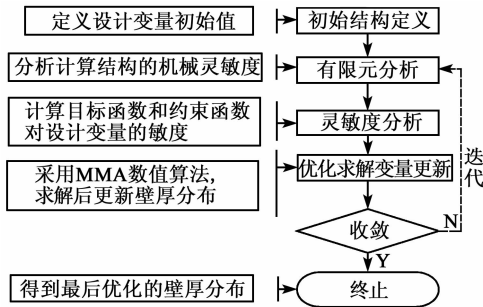


图 2 盘形谐振子壁厚尺寸优化流程

### 3.3 优化结果与讨论

优化起始点为 $[20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20]$ ,即所有的谐振环壁厚都是  $20 \mu\text{m}$ 。仿真结果如图 3 所示。优化前的机械灵敏度数值为  $1.703 \times 10^{-4} \text{ m}/(\text{rad}/\text{s})$ ,优化后的数值为  $2.047 \times 10^{-4} \text{ m}/(\text{rad}/\text{s})$ ,优化使得机械灵敏度提升了 20.2%。该结果是  $Q$  值和  $m_{\text{eff}}$  提升,谐振频率下降的综合作用。

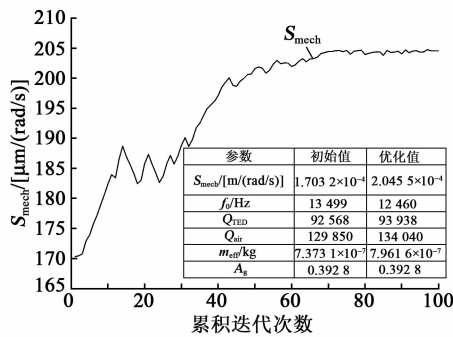


图 3  $S_{\text{mech}}$  的优化曲线和优化前、后关键参数对比

谐振环壁厚随着优化进程的变化趋势如图 4 所示,图中,编号越小的谐振环越靠近中心锚点。由图可知,最内层的两个环和最外侧一个环随着优化进行而逐渐增加,并最终稳定在某一值附近。最终优化的壁厚分布为 $[21.52, 21.17, 20.09, 20, 20, 20, 20, 20, 37.57]$ 。

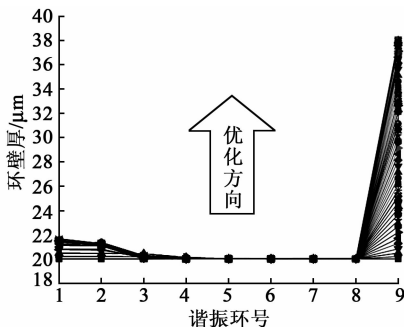


图 4 盘形谐振子不同谐振环壁厚尺寸优化流程

## 4 结束语

本文通过有限元法,采用 COMSOL with MATLAB 仿真实现了盘形谐振陀螺的机械灵敏度

计算。基于以上灵敏度仿真模块,开展了盘形谐振陀螺谐振环壁厚分布的优化工作,使机械灵敏度提升了 20%。本文提供了一套可行的 MEMS 陀螺谐振子优化设计方案,可以扩展到其他目标函数和约束条件,对谐振子的各种尺寸参数进行优化。

### 参考文献:

- [1] SENKAL D, AHAMED M J, TRUSOV A A, et al. Achieving sub-Hz frequency symmetry in micro-glass-blown wineglass resonators[J]. Journal of Microelectromechanical Systems, 2014, 23(1): 30-38.
- [2] 吕志清. 哥氏振动陀螺[J]. 压电与声光, 2004, 26(2): 98-102.  
LYU Zhiqing. Coriolis vibratory gyros[J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2004, 26(2): 98-102.
- [3] 毛海燕, 梁宇, 袁小平, 等. 半球谐振陀螺现状及发展趋势[J]. 压电与声光, 2014, 36(4): 584-587.  
MAO Haiyan, LIANG Yu, YUAN Xiaoping, et al. The current status and future trends of HRG[J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2014, 36(4): 584-587.
- [4] CHALLONER A D, HOWARD H G, LIU J Y. Boeing disc resonator gyroscope[C]//S. I. : Position, Location and Navigation Symposium-PLANS 2014, 2014: 504-514.
- [5] AHN C H, NITZAN S, NG E J, et al. Encapsulated high frequency(235 kHz), high-Q(100 k) disk resonator gyroscope with electrostatic parametric pump[J]. Applied Physics Letters, 2014, 105(24): 243504.
- [6] SVANBERG K. The method of moving asymptotes-a new method for structural optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, 24(2): 359-373.
- [7] ZHOU Xin, WU Yulie, XIAO Dingbang, et al. An investigation on the ring thickness distribution of disk resonator gyroscope with high mechanical sensitivity[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2016, 117: 174-181.
- [8] XIAO Dingbang, ZHOU Xin, LI Qingsong, et al. Design of a disk resonator gyroscope with high mechanical sensitivity by optimizing the ring thickness distribution[J]. Journal of Microelectromechanical Systems, 2016, 25(4): 606-616.
- [9] GERRARD D D, RODRIGUEZ J, ORTIZ L C, et al. Manipulation of heat flux paths in thermo-elastically damped resonators for Q optimization[C]//S. I. : Micro Electro Mechanical Systems (MEMS), 2017 IEEE 30th International Conference on IEEE, 2017: 1130-1133.
- [10] BAO M, YANG H, YIN H, et al. Energy transfer model for squeeze-film air damping in low vacuum[J]. Journal of Micromechanics and Microengineering, 2002, 12(3): 341.