

# 光弹调制器的振动分析与实验

吴也,胡朝晖

(北京航空航天大学 仪器科学与光电工程学院 惯性技术重点实验室,北京 100191)

**摘要:**研究了长度伸缩振动的光弹调制器的工作原理并进行振动分析。各向异性的压电石英在驱动电压下振动,当驱动方波信号频率与两块晶体的本征频率相匹配时,与压电石英用硅橡胶柔性连接的熔融石英随之共振,在两块晶体中传播的是同频率的纵驻波,光弹调制器整体作一维长度伸缩振动。将光弹调制器的振动等效为有阻尼的弹簧-质量块系统进行理论推导,得出振幅表达式,振动位移与驱动电压和光弹调制器的品质因数  $Q$  值成正比。最后通过有限元仿真与测振实验测量自制的光弹调制器的振动特性来验证推导的正确性。

**关键词:**光弹调制器;压电石英;熔融石英;品质因数  $Q$  值;激光测振仪

**中图分类号:**TM22+9;O32

**文献标识码:**A

## Vibration Analysis and Experiment on Photoelastic Modulator

WU Ye, HU Zhaohui

(Science and Technology on Inertial Laboratory, School of Instrumentation Science and Opto-electronics Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** The operating principle of photoelastic modulator with the length stretching vibration has been investigated and the vibration analysis of the photoelastic modulator has been carried out. The anisotropic piezoelectric quartz vibrates at the driving voltage. When the frequency of the driven square wave signal matches the intrinsic frequency of the two crystals, the fused quartz which is flexibly connected with the silicon rubber of the piezoelectric quartz will resonate. The longitudinal standing wave with same frequency propagates in the two crystals, while the photoelastic modulator as a whole vibrates with one-dimensional length stretching. The vibration of photoelastic modulator can be equivalent to a damped mass-spring system and then the expression of the amplitude can be derived. The vibration displacement is proportional to the  $Q$  values of the driven voltage and the photoelastic modulator. Finally, the vibration characteristic of the homemade photoelastic modulator has been measured through the finite element simulation and the vibration measurement experiment to verify the validity of the theoretical derivation.

**Key words:** photoelastic modulator; piezoelectric quartz; fused silica;  $Q$  value; laser vibrometer

## 0 引言

光弹调制器(PEM)是一种基于双折射效应和光弹效应的光学调制器件。与其他的光学调制器件相比,PEM具有光谱范围宽,调制精度和效率高,驱动功率小和全视场大等优点,被广泛应用于天文观测、偏振测量、光谱仪、量子传感和磁强计等领域<sup>[1-3]</sup>。随着不同应用的需求,PEM不断发展成单驱动 Kemp 型、多驱动 Kemp 型、Canit 型和 Bamber 型等多种结构<sup>[4-5]</sup>。其中,一维伸缩振动的单驱动 Kemp 型结构<sup>[6]</sup>最典型。该结构由经过频率匹配的棒状压电  $\alpha$ -石英和熔融石英组成,两者通过室温

硫化硅橡胶(RTV)连接,压电石英在特定频率的方波电压激励下与熔融石英形成共振,进而使熔融石英形成周期性的光弹效应,即熔融石英产生周期性变化的双折射,偏振光经 PEM 后被调制<sup>[7]</sup>。本文对单驱动 Kemp 型结构的 PEM 进行振动分析与有限元仿真,对按照计算的参数设计的 PEM 进行振动测试。

## 1 PEM 的振动分析

单驱动 Kemp 型结构的 PEM 由压电石英和熔融石英两块晶体组成,分别对两块晶体的振动特性进行分析,然后对 PEM 整体振动特性进行分析。

收稿日期:2016-12-05

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61227902);航天支撑技术基金资助项目

作者简介:吴也(1993-),男,湖北黄冈人,硕士生,主要从事光学检测方面的研究。通信作者:胡朝晖(1975-),男,重庆人,硕士生导师,博士,主要从事量子传感方面的研究。E-mail: huzh@buaa.edu.cn.

### 1.1 压电石英振动分析

图1为压电晶体。上、下表面为电极面位置。其长、宽、高分别为  $l, \omega$  和  $h$ , 假设  $l \gg \omega$ , 且  $l \gg h$ 。对压电晶体进行振动模态分析, 其  $y=0 \sim l$  每点位移和应力只与长度位置  $y$  和时间  $t$  有关, 与  $x$  和  $z$  无关。

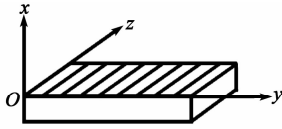


图1 压电晶体示意图

$\alpha$ -石英为 32 点群的各向异性晶体, 其 Van Dyke 矩阵<sup>[8]</sup>为

$$V = \begin{bmatrix} s & d^T \\ d & \epsilon \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中:  $d$  为压电系数矩阵;  $\epsilon$  为介电系数矩阵;  $s$  为顺度系数矩阵。

压电方程为

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ D \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} \sigma \\ E \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中:  $\sigma$  和  $\gamma$  分别为应力和应变;  $D$  为电位移矢量;  $E$  为电场矢量。

联立式(1)、(2)可得

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}\sigma_1 + s_{12}\sigma_2 + s_{13}\sigma_3 + s_{14}\sigma_4 + d_{11}E_1 \\ s_{12}\sigma_1 + s_{11}\sigma_2 + s_{13}\sigma_3 - s_{14}\sigma_4 - d_{11}E_1 \\ s_{13}\sigma_1 + s_{13}\sigma_2 + s_{33}\sigma_3 \\ s_{14}\sigma_1 - s_{14}\sigma_2 + s_{44}\sigma_4 + d_{14}E_1 \\ s_{44}\sigma_5 + 2s_{14}\sigma_6 - d_{14}E_2 \\ 2s_{14}\sigma_5 + 2(s_{11} - s_{12})\sigma_6 - 2d_{11}E_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

这里采用单下标表示法。在近似条件下, 除应力分量  $\sigma_2$  外, 其他应力分量可忽略。又因为电场施加在  $yz$  面的电极上, 所以电场分量只有  $E_1 \neq 0$ 。因而,  $y$  方向上的应变为

$$\gamma_2 = -d_{11}E_1 + s_{12}\sigma_2 \quad (4)$$

压电晶体  $y$  方向的位移为  $u$ , 且电场为均匀场, 则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_1 s_{12}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5)$$

式中  $\rho_1$  为压电晶体的密度。将式(5)代入自由边界条件可解得

$$u = \frac{-d_{11}E_0}{v} \cdot \frac{\cos[v(l-y)] - \cos(vy)}{\sin(vl)} \sin(\omega t) \quad (6)$$

式中:  $E_0$  为驱动电压幅值;  $\omega$  为驱动电压的角频率, 且  $v = \omega \sqrt{\rho_1 s_{22}}$ 。式(6)为驻波表达式, 即在压电晶

体中传播的是纵驻波, 且当  $y=l/2$  时  $u=0$ 。代入驻波条件可计算出压电晶体本征频率为

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{1}{\rho_1 s_{12}}} \quad (7)$$

### 1.2 熔融石英振动分析

熔融石英为各向同性光弹材料, 其长度为  $l'$ 、宽度和高度与压电晶体相同, 如图2所示。与压电晶体接触处设为坐标原点, 假设  $l' \gg \omega$  且  $l' \gg h$ 。对熔融石英进行弹性波分析, 其  $x=0$  到  $x=l'$  每点位移和应力只与长度位置  $x$  和  $t$  有关, 与  $y$  和  $z$  无关。

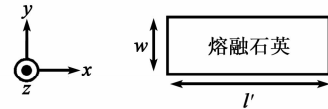


图2 熔融石英示意图

熔融石英运动方程为

$$\sigma_{ij,j} = \rho_2 \ddot{u}_i \quad (8)$$

式中: 下标  $i, j=1, 2, 3$ ;  $\sigma_{ij}$  为应力分量;  $\sigma_{ij,j}$  为应力分量对  $j$  求导;  $\rho_2$  为熔融石英的密度;  $\ddot{u}_i$  为位移分量的二阶时间导数。

弹性体的本构关系为<sup>[8]</sup>

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{13} \\ 2\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中  $c$  为劲度系数对称张量。弹性体几何方程为

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (10)$$

联立式(8)~(10)可得

$$c_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11)$$

其中  $c_0$  满足

$$\begin{vmatrix} c_{11} - c_0 & c_{16} & c_{15} \\ c_{16} & c_{66} - c_0 & c_{56} \\ c_{15} & c_{56} & c_{55} - c_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

对于各向同性的熔融石英,  $c_{15} = c_{16} = 0, c_{55} = c_{66}$ 。于是  $c_0$  的 3 个解分别为  $c_{11}, c_{55}$  和  $c_{66}$ ,  $c_{11}$  为纵波,  $c_{55}$  和  $c_{66}$  为横波, 即光弹晶体的振动可分解为 1 个独立的纵波和 2 个横波振动。纵波振动即为长度伸缩振动。又由于

$$u = A \sin(\omega t) \quad (13)$$

将式(13)代入式(11)可得

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\omega^2 \rho_2}{c_{11}} u = 0 \quad (14)$$

将式(14)代入自由边界条件可解得光弹晶体的位移为

$$u' = A \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) \sin(\omega t) \quad (15)$$

式中  $A$  为常量。特征频率为

$$f' = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho_2}} \quad (16)$$

### 1.3 PEM 整体振动分析

综上所述可得,压电石英和熔融石英两者振动皆为长度伸缩的纵波振动。若经过频率匹配使两者特征频率相等。PEM 在周期性外力作用下进行受迫振动,并由于阻尼的存在而产生能量耗散,这与有阻尼的弹簧-质量块系统振型相同,可将 PEM 等效为弹簧系统进行振动分析,如图 3 所示。

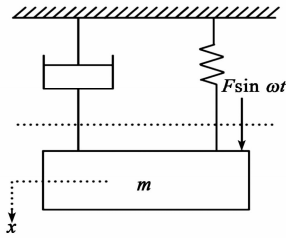


图 3 有阻尼的弹簧-质量块系统

该系统在周期性外力下作受迫振动的微分方程为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = F \sin \omega t \quad (17)$$

式中: $m$  为质量块的质量; $\alpha$  为阻尼器的阻尼; $k$  为弹簧弹性系数; $F \sin \omega t$  为作用在系统上的周期性驱动力, $F$  为驱动力幅值,与驱动电压幅值  $U$  成正比; $x(t)$  为质量块的位移,可等效为 PEM 晶体边缘处机械位移,其稳态解为

$$x(t) = A_x(\omega) \sin[\omega t + \psi_x(\omega)] \quad (18)$$

式中: $A_x(\omega)$  为 PEM 机械振幅; $\psi_x(\omega)$  为振动相位。

令系统的自由振荡角频率  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , 阻尼系数  $\xi =$

$\frac{c}{2km}$ , 则 PEM 的放大倍率为

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (19)$$

当  $\omega = \omega_0 = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$  ( $\omega_0$  为 PEM 的位移谐振频率)时,式(19)取得最大值,即

$$\beta_{\max} = Q = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (20)$$

式中: $Q$  为 PEM 的机械品质因数。若  $\xi \ll 1$ , 则有

$$\omega_0 \approx \omega_n \quad (21)$$

$$Q \approx \frac{1}{2\xi} \quad (22)$$

在 PEM 位移谐振频率附近 ( $|\omega/\omega_0 - 1| < \xi$ ), PEM 的机械振幅可近似为

$$A_x(\omega) \approx \frac{FQ}{k} \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1\right)^2}} \quad (23)$$

综上所述可得,在  $F$  一定的条件下,当  $\omega = \omega_0$  时,PEM 的机械振幅最大,驱动效率最高。因此,在 PEM 工作过程中, $\omega$  需与  $\omega_0$  一致,以达到最大的调制效率。在 PEM 位移谐振频率处,PEM 的机械振幅与  $FQ$  值呈正比,即  $A_x(\omega_0) \propto FQ \propto UQ$ 。PEM 作为一种谐振器件,对于确定的 PEM,其  $Q$  值一定,其振动幅值与驱动电压幅值成正比,可简单地通过调节驱动电压来控制 PEM 振动的幅值,进而改变其相位调制量。

## 2 仿真与实验

设计的 PEM 的谐振频率为 50 kHz,经式(7)、(16)计算得压电石英的长度为 51.09 mm,熔融石英的长度为 57.20 mm。用硅橡胶将两块晶体首尾相连,再在压电晶体长度表面上镀金属电极,施加同频率的方波驱动电压,熔融石英会产生共振,PEM 整体振型为长度伸缩振动。用 4 个陶瓷柱固定于经过氧化处理的铝合金箱体上,实物如图 4 所示。



图 4 PEM 实物图

### 2.1 PEM 的有限元仿真

通过有限元仿真对 PEM 整体进行多物理场耦合仿真,在研究过程中暂不考虑的影响,假设两块晶体首尾紧密相连<sup>[8]</sup>。利用结构力学下的压电设备模块和固体力学模块对 PEM 进行有限元分析,输入设计的参数和变换基矢矩阵。压电材料选择压电材料下的 Quartz RH (1949 IRE),压电方程选择应变-电荷型,初始电压为 100 V,光弹材料选择基本材料下的 Silica glass。预置研究为特征频率,在 50 kHz 附近进行扫频,图 5 为 PEM 振动特性的仿真。由图 5(a)可看出,长度伸缩振动的本征频率为 50 003 Hz,与设计频率 50 kHz 仅相差 3 Hz。求解 PEM 在本征频率 50 003 Hz 下的长度伸缩振动模态如图 5(b)所示,在压电晶体和光弹晶体的各自中点处,振动位移为 0,这与理论式(6)、(15)相符。

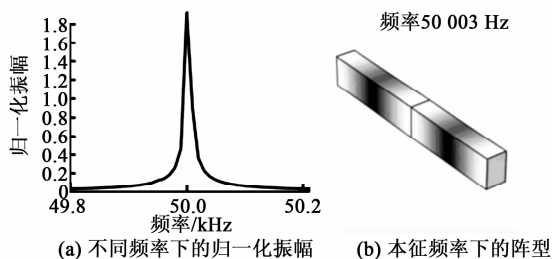


图5 PEM 振动特性的仿真

### 2.2 PEM 的测振实验

本实验采用扫频法对 PEM 的振动幅值进行测量,实验装置如图 6 所示。整套 Polytec 测振仪由 OFV3000 振动控制模块和 OFV502 激光控制模块组成。需用高压高频信号驱动压电晶体振动,选用的压电驱动电源可提供幅值 50~300 V、频率 20~100 kHz 可调节的方波信号。在熔融石英晶体的侧面贴上反射膜来接收和反射激光信号,用示波器对 PEM 的振动进行测量。

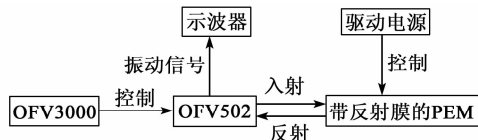


图6 测振实验装置示意图

首先,将驱动电压调至最大值(300 V),在 50 kHz附近进行扫频,确定 PEM 的本征频率为 51 222 Hz,其设计值与仿真值的误差为 2.4%,这是由实验的系统误差和陶瓷柱固定的系统误差造成的;其次,将驱动电压调成本征频率,调节电压幅值大小,测量不同电压幅值下 PEM 的振幅如图 7 所示。在共振条件下,PEM 的振幅与驱动电压幅值  $U$  成正比,即  $A_x(\omega_0) = \eta U$ ,且振幅电压系数  $\eta = 1.24 \times 10^{-10} \text{ m/V}$ 。

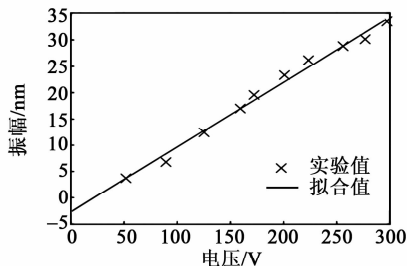


图7 PEM 振幅随驱动电压变化曲线

### 3 结束语

一维 Kemp 型 PEM 由一块压电石英通过 RTV704 硅橡胶与一块熔融石英首尾相连,通过谐振频率的方波驱动电压激励后,会形成长度伸缩振

动模态,两块晶体在各自长度中心处位移为 0。将 PEM 的机械振动等效为有阻尼的弹簧-质量块的振动,计算出工作在谐振频率下的 PEM 的振幅与其 Q 值和驱动电压幅值成正比。对于确定的 PEM,其 Q 值和谐振频率固定,机械振幅只与驱动电压幅值成正比。经实验测得的实验室设计的 Kemp 型 PEM 的谐振频率为 51 222 Hz,振幅电压系数为  $1.24 \times 10^{-10} \text{ m/V}$ 。

### 参考文献:

- [1] ZENG Aijun, LI Fanyue, ZHU Linglin, et al. Simultaneous measurement of retardance and fast axis angle of a quarter-wave plate using one photoelastic modulator [J]. Applied Optics, 2011, 50(22): 4347-4352.
- [2] BUDKER D, ROMALIS M. Optical magnetometry [J]. Nature Physics, 2007, 3(4): 227-234.
- [3] GUAN W, COOK P J, JONES G A, et al. Experimental determination of the Stokes parameters using a dual photoelastic modulator system [J]. Applied Optics, 2010, 49(14): 2644-2652.
- [4] 王艳超. 弹光调制傅里叶变换光谱仪稳定性研究[D]. 太原:中北大学, 2014.
- [5] PETKOVŠEK R, BAMMER F, SCHÜÖCKER D, et al. Dual-mode single-crystal photoelastic modulator and possible applications [J]. Applied Optics, 2009, 48(7): C86-C91.
- [6] WANG Baoliang, LIST J. Basic optical properties of the photoelastic modulator: part I. Useful aperture and acceptance angle [C]//San Diego, CA, United States: Optics & Photonics 2005, International Society for Optics and Photonics, 2005: 58881I.
- [7] DUAN Lihong, FANG Jiancheng, LI Rujie, et al. Light intensity stabilization based on the second harmonic of the photoelastic modulator detection in the atomic magnetometer [J]. Optics Express, 2015, 23 ( 25 ): 32481-32489.
- [8] HEYWANG W, HULL R, LUBITZ K, et al. Piezoelectricity: evolution and future of a technology [M]. Berlin: Springer, 2008.
- [9] 高霞, 王志斌. 基于 COMSOL Multiphysics 压电铌酸锂晶片仿真 [J]. 压电与声光, 2015, 37(2): 291-293. GAO Xia, WANG Zhibin. Simulation of piezoelectric lithium niobate chip based on COMSOL multiphysics [J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2015, 37 ( 2 ): 291-293.