文章编号:1004-2474(2017)05-0691-07

# 垂直于双压电材料界面裂纹的反平面问题研究

洪圣运,周旺民

(浙江工业大学 机械工程学院,浙江 杭州 310014)

摘 要:研究了双压电材料中垂直于界面裂纹的反平面问题。在裂纹面为可通导的边界条件下,通过对控制 方程进行傅里叶(Fourier)变换,并利用边界条件将问题转化为奇异积分方程进行求解,得到了裂纹面的位移函数、 裂纹尖端的应力强度因子、电位移强度因子和裂纹尖端能量释放率的表达式。数值分析了双压电材料的材料属性 对裂纹尖端能量释放率的影响。

关键词:双压电材料;垂直裂纹;奇异积分方程;能量释放率

**中图分类号:**TM202 文献标识码:A

## Study on the Anti-plane Normal to Interface Crack of Bi-piezoelectric Materials

#### HONG Shengyun, ZHOU Wangmin

(College of Mechanical Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China)

Abstract: This paper studies the bi-piezoelectric materials anti-plane problems with a crack normal to the interface. With the crack surface assumed electrically permeable, the problems can be transformed into a singular integral equation by using Fourier transform and boundary conditions, and the expressions of the displacement function in crack face, stress intensity factor at the crack tip, electric displacement intensity factor and energy release rate at the crack tip are obtained. The influences of the property of the bi-piezoelectric material on the energy release rate at the crack tip is numerically analyzed.

Key words: bi-piezoelectric material; vertical crack; singular integral equation; energy release rate

0 引言

压电材料具有电-力耦合的特性,广泛应用于航空航天、自动控制、微型机械系统、精密传感器等领域。压电元件是由单一的压电材料制备而成,但仅由一层压电材料制备而成的压电元件的压电效应微小,为了放大元件的压电效应,通常会让压电元件由多层压电材料复合而成,其中最典型的就是双压电材料。双压电材料是由上、下两层压电材料层合而成,增强了压电效应,克服了由单层压电材料局备而成的压电元器件在压电效应上不足的缺点。但由于存在连接界面,界面处的微小缺陷在外载的作用下会形成连接界面处的裂纹,这极大地影响了双压电材料的可靠性和使用寿命<sup>[2]</sup>。因此,针对双压电材料在界面处的断裂研究是有意义的。

近年来,对于复合压电材料裂纹问题的研究已 取得了显著的成果。Pak<sup>[3]</sup>采用不可通导裂纹边界

条件研究了无限大压电介质中的中心反平面问题。 Ueda<sup>[4]</sup>研究了两端被弹性材料固定的含中心裂纹 的压电介质复合平板的平面问题。Li 和 Wang<sup>[5]</sup>采 用可通导裂纹边界条件,给出了双压电材料在反平 面切应力和电位移作用下垂直于界面处裂纹尖端和 匀质裂纹尖端的应力强度因子。Narita 和 Shindo<sup>[6]</sup>研究了两个半无限大弹性层绑定一层含有平行 于界面裂纹的压电介质,在反平面切应力和电位移 的作用下裂纹尖端场和各类场的强度因子。M. Gherrous 和 H. Ferdjani<sup>[7]</sup>研究了双压电材料界面 处 Griffith 裂纹的反平面问题。由双压电材料衍生 出的压电功能梯度材料裂纹的相关研究也有显著的 成果[8-15]。目前,双压电材料的研究集中在位于界 面上的中心裂纹或单侧裂纹尖端场的各类强度因 子。对于垂直于界面的裂纹的研究不多,从能量释 放率的角度分析这类裂纹,报道较少。

基金项目:浙江省自然科学基金资助项目(Y6100440)

收稿日期:2016-10-24

作者简介:洪圣运(1990-),男,浙江台州人,硕士生,主要从事压电材料的研究。通信作者:周旺民,硕士生导师,主要从事应用物理等相关 方面的研究。E-mail:zhouwm@zjut.edu.cn。

本文主要研究双压电材料中垂直于界面裂纹的 反平面问题,在反平面裂纹(Ⅲ型裂纹)状态下,切应 力沿极化方向作用并未改变裂纹的闭合条件,因此, 可以认为裂纹面是可通导的。对此反平面问题的控 制方程进行傅里叶(Fourier)变换,利用可通导裂纹 边界条件将问题转化为奇异积分方程的求解,进而 得到裂纹面的位移函数及裂纹尖端相应的强度因子 和裂纹尖端的能量释放率。最后,通过数值计算分 析了材料属性对垂直于界面裂纹尖端奇异性指数和 能量释放率的影响,为双压电材料元件的可靠性分 析与设计提供必要的理论参考。

1 垂直双压电材料界面裂纹的反平面问题

图 1 为双压电材料中垂直界面裂纹。由图可 知,两个半无穷大不同的匀质压电材料 I、II 沿 y 轴完好地粘结在一起。压电材料 I 中有一长度为 a 的裂纹垂直于界面,裂纹左端处于两压电材料的结 合界面。在无穷远端处施加沿 y 方向、大小为 D。 的电位移和沿 z 方向、大小为 τ。的切应力。这一问 题可以简化为反平面问题处理,其基本方程和边界 条件如下:

控制方程:

$$c_{44} \nabla^2 W + e_{15} \nabla^2 \varphi = 0 \tag{1}$$

$$e_{15} \nabla^2 W - \varepsilon_{11} \nabla^2 \varphi = 0 \tag{2}$$

式中:W 为z 方向位移; φ为电势; c44、e15、ε11 分别为 压电材料的弹性常数、压电常数和介电常数。



图 1 双压电材料中垂直界面裂纹

几何方程,即切应变  $\gamma$ 、电场强度 E 与位移 W、  $\varphi$  的关系分别为

$$\gamma_{xx} = \frac{\partial W}{\partial x} \tag{3}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} \tag{4}$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{5}$$

$$E_{y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{6}$$

本构方程,即切应力 $\tau$ 、电位移D与W、 $\varphi$ 的关

系分别为

$$\tau_{xz} = c_{44} \frac{\partial W}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{7}$$

$$\tau_{yz} = c_{44} \frac{\partial W}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$
(8)

$$D_x = e_{15} \frac{\partial W}{\partial x} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$
(9)

$$D_{y} = e_{15} \frac{\partial W}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$
(10)

裂纹面上的边界条件:

$$\tau_{yz}^{I}(x,0) = -\tau_{0} \qquad 0 < x < a \qquad (11)$$

$$D_{y}(x,0) = -D_{0} \qquad 0 < x < a \tag{12}$$

对称面上的边界条件:

$$W^{1}(x,0) = 0 \qquad x > a$$
 (13)

$$W^{II}(x,0) = 0 \qquad x < 0$$
 (14)

$$\varphi^{i}(x,0) = \varphi^{i}(x,0) = 0$$
(15)

界面边界条件:

$$W^{I}(0,y) = W^{II}(0,y) - \infty < y < +\infty$$
(16)  

$$\tau^{I}_{xx}(0,y) = \tau^{II}_{xx}(0,y) - \infty < y < +\infty$$
(17)  

$$\varphi^{I}(0,y) = \varphi^{II}(0,y) - \infty < y < +\infty$$
(18)  

$$D^{I}_{x}(0,y) = D^{II}_{x}(0,y) - \infty < y < +\infty$$

(19)

2 奇异性积分方程的推导与求解

## 2.1 奇异性积分方程的推导

由于问题的对称性,我们取双压电材料的上半 空间 y>0 作为研究对象。运用傅里叶变换,式 (1)、(2)的解可表示为

$$W^{I} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{1}(\boldsymbol{\xi}) e^{-i\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{y}} e^{-i\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{\xi} + \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} A_{2}(\boldsymbol{\xi}) e^{-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{r}} \sin(\boldsymbol{y}\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$
(20)  
$$\varphi^{I} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{1}(\boldsymbol{\xi}) e^{-i\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{y}} e^{-i\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{\xi} +$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} B_2(\boldsymbol{\xi}) e^{-\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{r}} \sin(\boldsymbol{y} \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$
(21)

$$W^{II} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_1(\xi) e^{-|\xi|_y} e^{-i\xi x} d\xi + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} C_2(\xi) e^{\xi x} \sin(y\xi) d\xi$$
(22)

$$\varphi^{II} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_1(\xi) e^{-|\xi|_y} e^{-i\xi r} d\xi + \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} D_2(\xi) e^{\xi r} \sin(y\xi) d\xi$$
(23)

(33)

式中: $A_j(\xi)$ 、 $B_j(\xi)$ 、 $C_j(\xi)$ 、 $D_j(\xi)$ (j=1,2)是依赖 于边界条件的未知待定函数;i为虚数。

将式(14)、(15)代人式(21)~(23),可得  
$$B_1(\xi) = C_1(\xi) = D_1(\xi) = 0$$
 (24)

为了将问题简化为一个积分等式,引入位错密 度函数,则有

$$g(x) = -\frac{\partial W^{1}(x,0)}{\partial x} \quad 0 < x < a \qquad (25)$$

由式(13)、(14)可得,g(x)须满足如下等式:

$$\int_{0}^{a} g(x) dt = 0$$
(26)

将式(25)代入式(20)可得

$$A_1(\xi) = \frac{\mathrm{i}}{\xi} \int_0^a g(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} \mathrm{d}t \qquad (27)$$

将式(20)~(23)代人式(7)~(10),并应用式(16)~(19)和式(27),得

$$A_{2}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{(c_{44}^{\mathrm{I}} - c_{44}^{\mathrm{I}})(\boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{I}}) + e_{15}^{\mathrm{I}2} - e_{15}^{\mathrm{I}2}}{(c_{44}^{\mathrm{I}} + c_{44}^{\mathrm{I}})(\boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{I}}) + (e_{15}^{\mathrm{I}} + e_{15}^{\mathrm{II}})^{2}} \cdot \frac{\mathrm{i}}{\boldsymbol{\xi}} \int_{0}^{a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}t} g(t) \,\mathrm{d}t \qquad (28)$$

$$\lambda = \frac{(c_{44}^{\mathrm{I}} - c_{44}^{\mathrm{II}})(\varepsilon_{11}^{\mathrm{II}} + \varepsilon_{11}^{\mathrm{II}}) + e_{15}^{\mathrm{I}\,2} - e_{15}^{\mathrm{II}\,2} + 2e_{15}^{\mathrm{II}}e_{15}^{\mathrm{II}} - 2c_{44}^{\mathrm{II}}e_{15}^{\mathrm{II}\,2}/c_{44}^{\mathrm{II}}}{(c_{44}^{\mathrm{II}} + c_{44}^{\mathrm{II}})(\varepsilon_{11}^{\mathrm{II}} + \varepsilon_{11}^{\mathrm{II}}) + (e_{15}^{\mathrm{II}} + e_{15}^{\mathrm{II}})^{2}}$$

在式(33)中,假设材料 I、II 为纯弹性材料,则 参数  $e_{15}^{I}$ 、 $e_{15}^{I}$ 、 $\varepsilon_{11}^{I}$ 、 $\varepsilon_{11}^{II}$ 均为 0,代入式(33)可得  $\lambda = (c_{44}^{I} - c_{44}^{II})/(c_{44}^{II} + c_{44}^{II})$ ,这一结果与文献[16]研 究两个弹性粘结半平面中含有垂直于界面裂纹的反 平面问题的结论一致。

## 2.2 奇异积分方程的求解

根据 Bueclner 的研究结论<sup>[17]</sup>,式(32)的解为

$$g(x) = -\frac{1}{2\sin(\pi a/2)} \times \frac{\tau_0}{c_{44}^1} \cdot \left[ \left( \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} \right)^a \left( \frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 1 \right) + \left( \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} \right)^{-\alpha} \left( \frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 - x^2}} - 1 \right) \right]$$
(34)

式中 a 为裂纹长度。

在裂纹段0 < x < a,有

 $\cos(\pi\alpha) = -\lambda \tag{35}$ 

式中参数 α 为裂纹尖端的奇异性指数,由参数 λ 确定。

根据式(33),当材料 I、II为相同的压电材料 时, $\lambda = 0$ ,这时  $\alpha = 1/2$ ,这正是单一压电材料裂纹 尖端处的奇异性指数。不难确定  $|\lambda| < 1$ , $\alpha$ 与参数  $\lambda$ 的关系如图 2 所示。

$$B_{2}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{2(c_{44}^{\mathrm{I}}e_{15}^{\mathrm{I}} - c_{44}^{\mathrm{I}}e_{15}^{\mathrm{I}})}{(c_{44}^{\mathrm{I}} + c_{44}^{\mathrm{I}})(\varepsilon_{11}^{\mathrm{I}} + \varepsilon_{11}^{\mathrm{II}}) + (e_{15}^{\mathrm{I}} + e_{15}^{\mathrm{II}})^{2}} \cdot \frac{\mathrm{i}}{\boldsymbol{\xi}} \int_{0}^{a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\xi} t} g(t) \,\mathrm{d}t$$
(29)

$$C_{2}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{2c_{44}^{I}(\boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{I}) + 2e_{15}^{I}(e_{15}^{I} + e_{15}^{I})}{(c_{44}^{I} + c_{44}^{II})(\boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{II}) + (e_{15}^{I} + e_{15}^{II})^{2}} \cdot \frac{\mathrm{i}}{\boldsymbol{\xi}} \int_{0}^{a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}t} g(t) \mathrm{d}t$$
(30)

$$D_{2}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{2(c_{44}^{\mathrm{I}}e_{15}^{\mathrm{II}} - c_{44}^{\mathrm{II}}e_{15}^{\mathrm{II}})}{(c_{44}^{\mathrm{I}} + c_{44}^{\mathrm{II}})(\varepsilon_{11}^{\mathrm{II}} + \varepsilon_{11}^{\mathrm{II}}) + (e_{15}^{\mathrm{II}} + e_{15}^{\mathrm{II}})^{2}} \bullet \frac{\mathrm{i}}{\boldsymbol{\xi}} \int_{0}^{a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}t} g(t) \mathrm{d}t \qquad (31)$$

将式(24),(27)~(31)代入式(20)~(23)后,再 代入式(7)、(8),利用式(11),可得到一个关于密度 函数 g(x)的奇异性积分方程:

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{a} \left( \frac{1}{t+x} + \frac{\lambda}{t-x} \right) g(t) = -\frac{\tau_{0}}{c_{44}^{1}}$$
(32)

其中



图 2 材料参数λ和α的关系

对密度函数进行积分,得到裂纹面在外场作用 下的位移函数:

$$W^{I}(x,0) = \int_{0}^{x} g(x) dx = -\frac{x}{\sin(\pi a/2)} \cdot \frac{\tau_{0}}{c_{44}^{I}} \left[ \left( \frac{x}{a + \sqrt{a^{2} - x^{2}}} \right)^{a} - \left( \frac{x}{a + \sqrt{a^{2} - x^{2}}} \right)^{-a} \right]$$
(36)

从式(36)可看出,裂纹面的位移只与外加切应 力有关,而与外加电位移无关。这是由于裂纹面边 界条件采用了可通导裂纹的边界条件,电位移在裂 纹处未受到裂纹面的阻隔。因此,可以得出裂纹尖 端的应力强度因子和能量释放率也与外加电位移无 关,这一结论和文献[18]研究的含有中心界面裂纹的压电层的反平面问题的结果一致。

3 应力强度因子和能量释放率

为了进一步研究裂纹尖端的断裂行为,我们引 人两个常用来衡量裂纹扩展的准则——应力强度因 子和裂纹尖端的能量释放率。

## 3.1 应力强度因子

Ⅲ型裂纹尖端强度因子的表达式为

$$K^{q}_{\mathbb{II}} = \lim_{x \to -\infty} (-2\pi x)^{a} q^{\mathbb{II}}(x, 0^{+})$$
(37)

式中 q 可分别表示 τ, D, E 和 γ,式(37)依次表示相 应的切应力强度因子、电位移强度因子、电场强度因 子和切应变强度因子。

为了求得在裂纹尖端 x=0 处的应力强度因 子,将 g(x)在 x=0 处展开得

$$g(x) = -\frac{\alpha - 1}{2\sin(\pi\alpha/2)} \frac{\tau_0}{c_{44}^{\rm I}} \left[ \frac{2(\alpha - x)}{x} \right]^a + O(1) \qquad x \approx 0 \qquad (38)$$

式中O(1)为非奇异项。

材料Ⅱ的切应力和电位移的积分表达式为

$$\tau_{yz}^{\mathbb{I}}(x,0) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{a} \frac{\lambda_{z}^{\mathbb{I}}}{t-x} g(t) dt$$
(39)

$$D_{y}^{\mathbb{I}}(x,0) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{a} \frac{\lambda_{D}^{\mathbb{I}}}{t-x} g(t) dt$$

$$(40)$$

其中

$$\lambda_{r}^{I} = \frac{2c_{44}^{I}c_{44}^{I}(\varepsilon_{11}^{I} + \varepsilon_{11}^{II}) + 2(c_{44}^{I}e_{15}^{I^{2}} + c_{44}^{I}e_{15}^{I^{2}})}{(c_{44}^{I} + c_{44}^{II})(\varepsilon_{11}^{I} + \varepsilon_{11}^{II}) + (e_{15}^{I} + e_{15}^{II})^{2}}$$

$$\lambda_{D}^{I} = \frac{2c_{44}^{II}e_{15}^{I}\varepsilon_{11}^{II} + 2c_{44}^{I}e_{15}^{II}\varepsilon_{11}^{II} + 2e_{15}^{I}e_{15}^{II}(e_{15}^{I} + e_{15}^{II})}{(c_{44}^{I} + c_{44}^{II})(\varepsilon_{11}^{II} + \varepsilon_{11}^{II}) + (e_{15}^{I} + e_{15}^{II})^{2}}$$

$$(41)$$

$$\tau_{yz}^{II} = \frac{(2a)^{a}}{(-x)^{a}} \frac{(1-a)\lambda_{z}^{II}}{\sin(\pi a)\sin(\pi a/2)} \frac{\tau_{0}}{c_{44}^{II}} + O(1)$$
$$x \to 0^{-}$$
(43)

$$D_{yz}^{II} = \frac{(2a)^{\alpha}}{(-x)^{\alpha}} \frac{(1-\alpha)\lambda_D^{II}}{\sin(\pi a)\sin(\pi a/2)} \frac{\tau_0}{c_{44}^{II}} + O(1)$$
  
$$x \to 0^-$$
(44)

用恒等式

$$\sin(\pi a)\sin(\pi a/2) = (1+\lambda)\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}} \qquad (45)$$

替换相应参数,得到由 λ 表征的垂直于界面处裂纹 尖端的各类强度因子

$$K_{\mathbb{II}}^{\mathfrak{r}} = \frac{\sqrt{2}(1-\alpha)}{(1+\lambda)\sqrt{1-\lambda}} \frac{\lambda_{\mathfrak{r}}^{\mathbb{I}}}{c_{44}^{1}} \tau_{0} (4\pi a)^{\alpha}$$
(46)

$$K_{\mathbb{II}}^{D} = \frac{\sqrt{2}(1-\alpha)}{(1+\lambda)\sqrt{1-\lambda}} \frac{\lambda_{I}^{\mathbb{I}}}{c_{44}^{1}} \tau_{0} (4\pi a)^{\alpha}$$
(47)

$$K_{\mathbb{III}}^{E} = \frac{\sqrt{2}(1-\alpha)}{(1+\lambda)\sqrt{1-\lambda}} \frac{\lambda \frac{\mathbb{I}}{\varepsilon_{44}}}{c_{44}^{E}} \tau_{0} (4\pi a)^{\alpha}$$
(48)

$$K_{\mathbb{II}}^{\gamma} = \frac{\sqrt{2}(1-\alpha)}{(1+\lambda)\sqrt{1-\lambda}} \frac{\lambda_{\tau}^{\mathbb{II}}}{c_{44}} \tau_0 (4\pi a)^{\alpha}$$
(49)

其中

$$\lambda_{E}^{II} = \frac{2c_{44}^{I}(\varepsilon_{11}^{I} + \varepsilon_{11}^{II}) + 2e_{15}^{I}(e_{15}^{I} + e_{15}^{II})}{(c_{44}^{I} + c_{44}^{II})(\varepsilon_{11}^{I} + \varepsilon_{11}^{II}) + (e_{15}^{I} + e_{15}^{II})^{2}} (50)$$
$$\lambda_{\gamma}^{II} = \frac{2(c_{44}^{I}e_{15}^{II} - c_{44}^{II}e_{15}^{II})}{(c_{44}^{I} + c_{44}^{II})(\varepsilon_{11}^{II} + \varepsilon_{11}^{II}) + (e_{15}^{II} + e_{15}^{II})^{2}} (51)$$

#### 3.2 裂纹尖端的能量释放率

裂纹尖端能量释放率为[19]

$$G = \frac{K_{\mathbb{III}}^{\mathsf{r}} K_{\mathbb{III}}^{\mathsf{r}} - K_{\mathbb{III}}^{\mathsf{D}} K_{\mathbb{III}}^{\mathsf{E}}}{2}$$
(52)

把式(46)~(49)代入式(52),得能量释放率的 表达式:

$$G = \frac{(1-a)^2}{(1+\lambda)^2(1-\lambda)} \Omega \tau_0^2 (4\pi a)^{2a}$$
(53)

其中

(42)

$$\Omega = \frac{\lambda_r^{\mathbb{I}} \lambda_{\gamma}^{\mathbb{I}} - \lambda_E^{\mathbb{I}} \lambda_D^{\mathbb{I}}}{c_{44}^{\mathbb{I}^2}}$$
(54)

从式(53)可发现,裂纹尖端的能量释放率与 α 和材料属性参数 λ 相关。其大小由加载的切应力决 定,与外加电载荷无关。这一结论与 Zhang 和 Tong(1996)<sup>[20]</sup>的结论一致。

由此我们得出,与内嵌于单一压电材料的裂纹 尖端能量释放率相似,双压电材料中垂直于界面处 裂纹尖端的能量释放率与双压电材料界面处的 α 有关。

4 材料属性对裂纹行为的影响

为了研究材料单独属性对于双压电材料断裂行 为的影响,假定压电材料 I 为表 1 中所列材料,构造 材料 II 的材料常数满足  $c_{44}^{II} = \rho_e c_{44}^{II}$ ,  $e_{15}^{II} = \rho_e e_{15}^{II}$ ,  $e_{11}^{II} = \rho_e \epsilon_{11}^{II}$ 。其中  $\rho_e \ \rho_e \ \rho_e \ \rho_e$  分别为弹性常数、压电常数和介 电常数的比例系数。

表1 相关压电材料的材料参数

	$c_{44}$ /	$e_{15}  / $	$\epsilon_{11}$ /	$e_{15}^2 /$
	$(10^9N/m^2)$	$(C/m^2)$	$\left[10^{-9} \mathrm{C}/(\mathrm{V} \cdot \mathrm{m})\right]$	$(c_{44} \epsilon_{11})$
${\rm BaTiO_3}$	43.0	11.60	11.20	0.279
PZT-5H	35.3	17.00	15.10	0.542
PZT-4	25.6	13.44	6.00	1.175

4.1 弹性常数对裂纹尖端行为的影响

材料保持 $\rho_e = \rho_e = 1$ 不变,即当材料 [、]] 中压

电常数和介电常数相同,仅改变 $\rho_c$ ,这时

$$\lambda = \frac{(1 - \rho_{\rm c}) + m - m\rho_{\rm c}}{1 + \rho_{\rm c} + 2m} \tag{55}$$

其中

$$m = \frac{(e_{44}^{\rm I})^2}{c_{44}^{\rm I} \epsilon_{11}^{\rm I}} \tag{56}$$

图 3 为  $\rho_c$  对  $\alpha$  的影响。由图可知,裂纹尖端处 的  $\alpha$  随着  $\rho_c$  的增加而减小,当  $\rho_c = 1$  时,材料 I、II 相同, $\alpha = 0.5$ ,这与匀质材料裂纹尖端的情况相同; 当  $\rho_c > 1$  时, $\alpha < 0.5$ ,这意味着压电材料 II 比 I 更 硬。图 4 为  $\rho_c$  的变化情况对左端界面处裂纹能量 释放率的影响。为了能更明确的定量分析垂直于界 面处裂纹的能量释放率,我们引入了右侧端裂纹尖 端的能量释放率  $G_0$ ,右侧端面的裂纹尖端内嵌于匀 质压电材料中,可以用来比对尖端处于界面的左侧 界面端裂纹的能量释放率  $G_0$ 当  $\rho_c = 1$  时,材料 I、 II 相同, $G_0 = G$ ,符合实际情况;当  $\rho_c > 1$  时, $G > G_0$ , 说明在界面处裂纹的能量释放率会随着  $\rho_c$  的增大 而增大。





## 4.2 压电常数对裂纹尖端行为的影响

材料保持 $\rho_{e} = \rho_{e} = 1$ 不变,即当材料 I、II 中弾 性常数和介电常数相同,仅改变 $\rho_{e}$ ,则有

$$\lambda = \frac{1 - \rho_{\rm e}^2 + 2\rho_{\rm e} - 2}{(1 + \rho_{\rm e})^2 + 4/m}$$
(57)

图 5 为  $\rho_e$  对  $\alpha$  的影响。由图可知,当  $\rho_e > 0$  时, 裂纹尖端的  $\alpha$  并未发生变化,其值稳定在 0.5;当  $\rho_e < 0$  时,表示材料 I、II 的极化方向相反, $\alpha$  随  $\rho_e$  的 减少而减少。图 6 为  $\rho_e$  对裂纹尖端能量释放率的 影响。由图可知,当  $\rho_e > 0$  时,左端界面处裂纹尖端 能量释放率并未发生改变,大小和  $G_o$  相同;但当  $\rho_e < 0$  时,G 会随着  $\rho_e$  的减小而减小。由此可看出, 当压电材料 I、II 极化方向相同时,压电常数大小并 不能对裂纹尖端的行为产生明显影响。只有当极化 方向相反时,压电常数才会对裂纹尖端的行为产生 影响。





## 4.3 介电常数对裂纹尖端行为的影响

材料保持  $\rho_{e} = \rho_{e} = 1$  不变,仅改变  $\rho_{e}$  时,可以发现  $\lambda = 0$ ,  $\alpha = 1/2$ 。即奇异性指数并不随着  $\rho_{e}$  的改变 而改变。但当  $\rho_{e} = -1$  时,即材料的极化方向相反时,则有

$$\lambda = -\frac{2m}{1+\rho_{\epsilon}} \tag{58}$$

当压电材料 I、II的弹性常数相同,压电常数大 小相同但极化方向相反时,改变介电常数的比例大 小,其  $\alpha$  始终小于 0.5,且随着  $\rho_{\epsilon}$  的增大而增大,无 限趋近于 0.5(见图 7)。图 8 为  $\rho_{\epsilon}$  对裂纹尖端能量 释放率的影响。由图可知,当 $\rho_{\epsilon} > 1$ 时,裂纹尖端的 能量释放率是趋于平缓的,随着  $\rho_{\epsilon}$  的增大而减小。 当 $\rho_{\epsilon} = 1$ 时, $G < G_{0}$ ,说明压电材料 I、II 极化方向 相反时会对左端垂直于界面处裂纹尖端能量释放率 产生影响,即与单一匀质压电材料中的裂纹相比,极 化方向相反时会抑制垂直于界面处裂纹的扩展。



图 8 pe 对裂纹尖端能量释放率的影响

综上所述,文中选取了3种压电陶瓷材料进行 了数值分析,结果发现不同组合的双压电材料,材料 常数对奇异性指数、能量释放率的影响,尽管在定量 方面有区别,但定性方面基本一致。在可通导的裂 纹边界条件下,双压电材料中垂直于界面型裂纹的 断裂行为受到材料属性和压电材料极化方向的影 响。在极化方向相同的情况下,裂纹尖端的行为主 要受到材料弹性常数的影响,而压电常数和介电常 数的大小对裂纹的行为基本无影响。在压电材料 Ⅰ、Ⅱ的极化方向相反时,尖端裂纹的行为受到弹性 常数、压电常数和介电常数的共同作用。

5 结论

本文主要研究了双压电材料中垂直于界面裂纹 的反平面问题。通过傅里叶变换将问题归结于求解 奇异性积分方程。求解方程得到了位移和电势的具 体表达式,从而获得了双压电材料中垂直于界面裂 纹尖端的应力强度因子、电位移强度因子、电场强度 因子、应变强度因子和能量释放率。分析了压电材 料中3个材料常数对垂直于界面裂纹尖端奇异性指 数及能量释放率的影响。得到了以下结论:

 在可通导的裂纹条件下,裂纹尖端的应力强 度因子和能量释放率只和机械载荷有关,与外加电 位载荷无关。

 2) 双压电材料中垂直于界面处裂纹尖端的奇 异性由双压电材料的材料属性决定。

3)双压电材料两边极化方向相同时,垂直界面 处裂纹尖端的能量释放率主要受压电材料弹性常数 的影响,而压电常数和介电常数对垂直于界面处裂 纹的行为几乎无影响

4)双压电材料极化方向不同时,垂直于界面裂 纹尖端的能量释放率是受3种材料常数共同影响, 且裂纹呈抑制扩展的趋势。

## 参考文献:

- [1] FERNANDES A, POUGET J. Analytical and numerical approaches to piezoelectric bimorph[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(17):4331-4352.
- [2] CHONAN S, JIANG Z W, KOSEKI M. Soft-handling gripper driven by piezoceramic bimorph strips [J].
   Smart Materials and Structures, 1996, 5(4):407.
- [3] PAK Y E. Crack extension force in a piezoelectric material[J]. Journal of Applied Mechanics, 1990, 57(3): 647-653.
- [4] UEDA S. The mode I crack problem for layered piezoelectric plates[J]. International Journal of Fracture, 2002,114(1):63-86.
- [5] LI X F, WANG B L. Anti-plane shear crack normal to and terminating at the interface of two bonded piezoelectric ceramics[J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(11): 3796-3810.
- [6] NARITA F, SHINDO Y. The interface crack problem for bonded piezoelectric and orthotropic layers under antiplane shear loading [J]. International Journal of Fracture, 1999, 98(1):87-102.
- [7] GHERROUS M, FERDJANI H. Analysis of a Griffith crack at the interface of two piezoelectric materials under anti-plane loading [J]. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2016, 28(6): 1683-1704.
- [8] UEDA S. Crack in functionally graded piezoelectric strip bonded to elastic surface layers under electromechanical loading[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2003, 40(3): 225-236.
- [9] LI Y D, LEE K Y. An anti-plane crack perpendicular to

the weak/micro-discontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and linear non-homogeneities[J]. International Journal of Fracture, 2007, 146 (4):203-211.

- [10] ZHOU Z G, WU L Z, WANG B. The behavior of a crack in functionally graded piezoelectric/piezomagnetic materials under anti-plane shear loading[J]. Archive of Applied Mechanics, 2005, 74(8): 526-535.
- [11] DING S H,LI X,GUO L F. Analysis of bonded piezoelectric materials with a crack perpendicular to the interface subjected to in-plane loading[J]. Computational Materials Science, 2010, 47(4):977-984.
- [12] HSU W H,CHUE C H. Mode Ⅲ fracture problem of an arbitrarily oriented crack in an FGPM strip bonded to a homogeneous piezoelectric half plane[J]. Meccanica,2009,44(5):519-534.
- [13] OU Y L, CHUE C H. Mode Ⅲ eccentric crack in a functionally graded piezoelectric strip[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(20): 6148-6164.
- [14] YONG H D,ZHOU Y H. A mode III crack in a functionally graded piezoelectric strip bonded to two dissimilar piezoelectric half-planes [J]. Composite Struc-

(上接第 690 页)

#### 参考文献:

- LUO Sha, ZHU Lei, SUN Sheng. Compact dual-mode triple-band bandpass filters using three pairs of degenerate modes in a ring resonator[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2011, 59(5): 1222-1229.
- [2] HONG Jiasheng, HUSSEIN S, CHUN Younghoon. Dual-mode microstrip open-loop resonators and filters
   [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2007, 55(8):1764-1770.
- [3] 唐伟.基于三维电磁耦合的滤波器研究[D]. 成都:电 子科技大学,2015.
- [4] 杨阳.内嵌式三频微带滤波器研究[D].西安:西安电子科技大学,2014.
- [5] WU Guochen, WANG Guangming, JIANG Gangliang, et al. Miniaturised microstrip dual-band bandpass filter using novel symmetric double-spiral resonators for WLAN application [J]. Electronics Letters, 2015, 51 (15):1177-1178.

tures,2007,79(3):404-410.

- [15] CHUE C H,OU Y L. Mode Ⅲ crack problems for two bonded functionally graded piezoelectric materials[J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42 (11):3321-3337.
- [16] COOK T S, ERDOGAN F. Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface[J]. International Journal of Engineering Science, 1972, 10(8):677-697.
- [17] BUECKNER H F. On a class of singular integral equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1966, 14(3): 392-426.
- [18] WANG B L, MAI Y W. Fracture of a piezoelectric material layer bonded by two elastic layers [J]. International Journal of Engineering Science, 2002, 40 (15): 1697-1727.
- [19] PAK Y E. Crack extension force in a piezoelectric material[J]. Journal of Applied Mechanics, 1990, 57(3): 647-653.
- [20] GAO H,ZHANG T Y,TONG P. Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in a piezoelectric ceramic[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids,1997,45(4):491-510.

.....

- [6] ZHANG Songbai, ZHU Lei. Compact and high-selectivity microstrip bandpass filters using triple-/quadmode stub-loaded resonators[J]. IEEE Microwave and Wireless Components Letters, 2011, 21(10):522-524.
- [7] AI Jing, ZHANG Yonghong, XU Kaida, et al. Miniaturized quint-band bandpass filter based on multi-mode resonator and λ/4 resonators with mixed electric and magnetic coupling[J]. IEEE Microwave and Wireless Components Letters, 2016, 26(5): 343-345.
- [8] KAMMA A, REDDY G S, MUKHERJEE J. Band notch UWB band pass filter with additional GSM 1800 band[C]//Shanghai:2016 Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS),2016:4481-4481.
- [9] SERRANO A L C, CORRERA F S. A triple-mode bandpass filter using a modified circular patch resonator[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2009,51(1):178-182.
- [10] LETAVIN D A, MITELMAN Y E, CHECHETKIN V A. A novel method of design of miniaturized microstrip microwave devices using filters[C]// Tel Aviv, Israel: Microwaves, Communications, Antennas and Electronic Systems (COMCAS), 2015;1-3.