

压电曲梁俘能器的机电耦合方程及其研究

丁维高, 谢进

(西南交通大学 机械工程学院, 四川 成都 610031)

摘要:使用哈密顿原理,建立了纯弯曲压电曲梁俘能器的机电耦合偏微分方程,对悬臂边界条件下的压电曲梁俘能器进行了模态分析,得到了俘能器在基础两向振动激励下的模态坐标方程;求解了俘能器在激励下电压与模态响应的稳定解。数值计算实例分析了激励频率、负载电阻对俘能器的电压及功率响应的影响。结果表明,曲梁俘能器与直梁俘能器的电压、功率响应规律具有相似之处,负载电阻不仅对曲梁俘能器的输出功率、输出电压有影响,也会影响其共振频率。

关键词:压电;曲梁;俘能器;机电耦合;模态分析

中图分类号:TM201.3

文献标识码:A

DOI:10.11977/j.issn.1004-2474.2018.05.011

Study on the Electromechanical Coupling Equations of Piezoelectric Curved Beam Harvester

DING Weigao, XIE Jin

(School of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: The electromechanical coupling equations of piezoelectric curved beam harvester under pure bending deformation are established by using Hamilton's principle in this paper. The modal analysis of the piezoelectric curved beam harvester under the cantilever boundary conditions is carried out, and the modal coordinate equations of the energy harvester excited by the basic two-direction vibration are obtained. The stable solutions of the voltage and modal response of the energy harvester under excitation are solved. The influences of the vibration frequency of the base and the load resistance on the output voltage and power of the harvester are demonstrated by the numerical examples. The results show that the voltage and power response of the curved beam harvester have similarities with that of the straight beam harvester, and the load resistance not only affects the output voltage and output power of the curved beam harvester, but also the resonant frequency.

Key words: piezoelectric; curved beam; harvester; electromechanical coupling; modal analysis

0 引言

压电俘能器因其能量密度高而被广泛应用于振动能量收集^[1]。作为俘能器研究的基础,各种类型俘能器的建模分析已受到广泛关注和研究^[2-4]。

曲梁式压电俘能器是一种新型的压电俘能器,可用于多方向振动能量收集^[5],并具有能适应微小空间的优点^[6]。但是,目前关于曲梁式压电俘能器的理论研究有限,如文献[5]提出了一种压电曲梁式俘能器,建立了其压电俘能方程,并使用有限元法得到了其输出电压的数值解。文献[6]提出了一种rainbow型的曲梁压电俘能器结构,使用有限元法

分析了其电压输出,但其都未考虑负载电阻对输出电压的影响。文献[7]建立了rainbow型压电曲梁俘能器结构的理论模型,但未考虑曲梁的切向位移,其模型是四阶偏微分方程。

事实上,当曲梁的圆心角较大时,曲梁的切向位移不可忽略,此时,曲梁的振动偏微分方程应为六阶偏微分方程^[8]。负载电阻对俘能器输出电压、输出功率、共振频率均有较大影响^[9]。总体来说,目前没有同时考虑负载电阻与曲梁切向位移的曲梁俘能器的动力学模型。

本文利用哈密顿原理,建立考虑负载电阻的压

收稿日期:2017-11-01

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51575457)

作者简介:丁维高(1994-),男,辽宁阜新人,硕士生,主要从事压电俘能器以及非线性动力学的研究。通信作者:谢进(1959-),男,教授,博士生导师,主要从事机械非线性动力学与混沌理论的研究。

电曲梁俘能器的机电耦合偏微分方程,并对无阻尼条件下的悬臂压电曲梁进行模态分析,对在水平与竖直方向简谐振动激励的作用下工作的机电耦合方程进行求解。

1 压电曲梁俘能器的机电耦合方程建立

图1为压电悬臂曲梁的结构。图中, R_0 为中心线的半径, θ_0 为整段曲梁的圆心角, R 为负载电阻, V 为电阻远地端的电压, h_s 为金属基础的厚度, h_p 为单片压电片的厚度, $x(t)$ 与 $y(t)$ 分别为基座水平和竖直方向的位移, $u(\theta,t)$ 与 $v(\theta,t)$ 分别为曲梁中心线上任意一点 P 的径向位移和切向位移。曲梁是圆心角为 θ_0 的一段圆弧梁,其横截面分为3层,外层与内层是压电层,均为径向极化,但极化方向相反;曲梁的中间层是金属基础。曲梁的内、外压电层相互串联,并与负载电阻组成电路。曲梁的一端自由,另一端与基础固接。

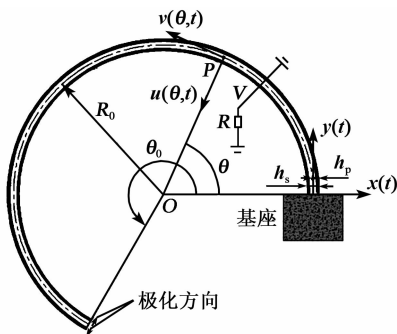


图1 悬臂曲梁式俘能器的结构示意图

在动力分析建模中,假设曲梁仅发生曲梁平面内的纯弯曲变形,忽略曲梁沿着圆周的伸长,同时忽略金属涂层与不同层之间粘胶的厚度。

本文中,将 Θ' 与 $\dot{\Theta}$ 分别表示任意变量 Θ 对 θ 与 t 的导数。根据文献[10],在纯弯曲条件下,中线上一点的伸长应该满足:

$$-\frac{u}{R_0} + \frac{1}{R_0}v' = 0 \quad (1)$$

距离中线 z 处的应变^[10]为

$$\epsilon = \frac{-z}{R_0^2}(v'' + v') \quad (2)$$

曲梁的动能为

$$T = \frac{1}{2}m \int_0^{\theta_0} (\dot{v}'^2 + \dot{v}^2) d\theta \quad (3)$$

式中: v' 为 v 对 θ 的一阶偏导数; v'' 为 v 对 θ 的二阶偏导数; $m = R_0 b(\rho_s h_s + 2\rho_p h_p)$, ρ_s 为金属基础的密度, ρ_p 为压电层的密度, b 为曲梁宽度。

设曲梁金属层的弹性模量为 E_m ,径向极惯性矩为 I ,则曲梁金属层的弹性势能为

$$U = \frac{E_m I}{2R_0^3} \int_0^{\theta_0} (v'' + v')^2 d\theta \quad (4)$$

假设压电层的内部电场为匀强电场,则压电片内的电场强度^[11]为

$$E_p = \frac{-V}{2h_p} \quad (5)$$

简记两阶跃函数的差为

$$H_a^b = H(x-a) - H(x-b) \quad (6)$$

将狄拉克函数第 i 阶导数记为 ${}^i\delta$,记

$${}^i\delta_a^b = {}^i\delta(x-a) - {}^i\delta(x-b) \quad (7)$$

在整个压电层区域 Ω 上余能的计算式^[11]为

$$W_e^* = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{S}^T \mathbf{e} \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{c} \mathbf{S} \right) d\Omega \quad (8)$$

式中: $\mathbf{E}$ 为电场强度向量; $\mathbf{S}$ 为应变向量; $\boldsymbol{\epsilon}$ 为介电常数矩阵; $\mathbf{e}$ 为压电常数矩阵; $\mathbf{c}$ 为弹性常数矩阵。则曲梁的总余能可表示为

$$W_e = W_e^* - U \quad (9)$$

将式(2)、(5)代入式(8),再将所得结果与式(4)代入式(9),化简后可得

$$W_e = -YI \int_0^{\theta_0} (v'' + v')^2 d\theta + \frac{\epsilon_{33} b R_0 \theta_0}{4} V^2 d\theta + \vartheta_s \int_0^{\theta_0} (v'' + v') V H_0^{\theta_0} d\theta \quad (10)$$

其中

$$YI = \frac{bc_{11} \left(\frac{2}{3} h_p^3 + h_p^2 h_s + \frac{1}{2} h_p h_s^2 \right) + E_m I}{2R_0^3} \quad (11)$$

$$\vartheta_s = \frac{be_{31}(h_p + h_s)}{2R_0} \quad (12)$$

式中 c_{11} 、 e_{31} 与 ϵ_{33} 分别为弹性常数、压电常数和介电常数。

设曲梁内部平均阻尼系数为 c_s ,则阻尼力的虚功可表示为

$$Q_s = - \int_{\Omega} c_s \frac{z^2}{R_0^4} (\dot{v}'' + \dot{v}') \delta(\dot{v}'' + \dot{v}') d\Omega \quad (13)$$

电阻作为非保守元件的虚功为

$$Q_R = - \frac{1}{R} V \delta V \quad (14)$$

忽略空气阻力,将式(3)、(10)、(13)和(14)代入哈密顿原理的计算式为

$$\int_0^t \delta(T + W_e) dt + \int_0^t (Q_s + Q_R) dt = 0 \quad (15)$$

在分部积分后,按照 δV 与 δv 合并同类项,可

得到压电曲梁的机电耦合偏微分方程:

$$2YI\left(\frac{\partial^6 v}{\partial \theta^6} + 2\frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\right) + c_s I_s \left(\frac{\partial^7 v}{\partial \theta^6 \partial t} + 2\frac{\partial^5 v}{\partial \theta^4 \partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^2 \partial t}\right) = m\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^2 \partial t^2}\right) + \vartheta_s V(\delta_0^0 + \delta_0^{\theta_0}) \quad (16)$$

$$\vartheta_s \int_0^{\theta_0} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \theta^3 \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial t}\right) + \frac{\epsilon_{33} b R_0 \theta_0}{2h_p} \dot{V} + \frac{1}{R} V = 0 \quad (17)$$

式中 I_s 为曲梁整个截面的极惯性矩。

设曲梁的切向绝对位移为

$$v(\theta, t) = v_b(\theta, t) + v_{rel}(\theta, t) \quad (18)$$

式中: $v_{rel}(\theta, t)$ 为相对于基础的切向位移; $v_b(\theta, t)$ 为基础位移的切向。对于图 1 所示的悬臂曲梁有

$$v_b(\theta, t) = -x(t) \sin \theta + y(t) \cos \theta \quad (19)$$

将式(18)代入式(16)、(17)可得到在基础激励

下的曲梁振动方程:

$$2YI\left(\frac{\partial^6 v_{rel}}{\partial \theta^6} + 2\frac{\partial^4 v_{rel}}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 v_{rel}}{\partial \theta^2}\right) + m\left(\frac{\partial^4 v_{rel}}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 v_{rel}}{\partial \theta^2}\right) + c_s I_s \left(\frac{\partial^7 v_{rel}}{\partial \theta^6 \partial t} + 2\frac{\partial^5 v_{rel}}{\partial \theta^4 \partial t} + \frac{\partial^3 v_{rel}}{\partial \theta^2 \partial t}\right) = m\left(\frac{\partial^2 v_b}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^4 v_b}{\partial \theta^2 \partial t^2}\right) + \vartheta_s V(\delta_0^0 + \delta_0^{\theta_0}) \quad (20)$$

$$\vartheta_s \int_0^{\theta_0} \left(\frac{\partial^4 v_{rel}}{\partial \theta^3 \partial t} + \frac{\partial^2 v_{rel}}{\partial \theta \partial t}\right) + \frac{\epsilon_{33} b R_0 \theta_0}{2h_p} \dot{V} + \frac{1}{R} V = 0 \quad (21)$$

2 无阻尼压电曲梁的模式分析

当不计阻尼与电学项时,曲梁的振动方程为

$$2YI\left(\frac{\partial^6 v}{\partial \theta^6} + 2\frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\right) = m\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^2 \partial t^2}\right) \quad (22)$$

设 $v(\theta, t) = \varphi(\theta) \eta(t)$, 式(22)可化为 2 个相互独立的方程:

$$2\alpha^2 YI \eta + m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial^6 \varphi}{\partial \theta^6} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^4} + (1 - \alpha^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \varphi = 0 \quad (24)$$

式中 α 为实常数。式(23)的解为

$$\eta(t) = A \cos(\alpha \sqrt{\frac{2YI}{m}} t) + B \sin(\alpha \sqrt{\frac{2YI}{m}} t) \quad (25)$$

式中 A 与 B 为待定常数。

当 α 在不同范围内取值时,得到式(24)的模式函数通解 φ 的表达式为

当 $\alpha < 0.336\ 745$ 时,有

$$\varphi = C_1 \sin(\sqrt{-x_1} \theta) + C_2 \cos(\sqrt{-x_1} \theta) + C_3 \sin(\sqrt{-x_2} \theta) + C_4 \cos(\sqrt{-x_2} \theta) + C_5 \cos(\sqrt{-x_3} \theta) + C_6 \sin(\sqrt{-x_3} \theta) \quad (26)$$

当 $0.336\ 745 < \alpha < 4.199\ 651$ 时,有

$$\varphi = C_1 \sin(\sqrt{-x_1} \theta) + C_2 \cos(\sqrt{-x_1} \theta) + C_3 e^{-\omega_2 \theta} \cos(si_2 \theta) + C_4 e^{\omega_2 \theta} \sin(si_2 \theta) + C_5 e^{-\omega_3 \theta} \sin(si_3 \theta) + C_6 e^{\omega_3 \theta} \cos(si_3 \theta) \quad (27)$$

其中

$$\omega_2 = \cos\left[\frac{1}{2} \arg(x_2)\right] \sqrt{|x_2|} \quad (28)$$

$$si_2 = \sin\left[\frac{1}{2} \arg(x_2)\right] \sqrt{|x_2|} \quad (29)$$

$$\omega_3 = \cos\left[\frac{1}{2} \arg(x_3)\right] \sqrt{|x_3|} \quad (30)$$

$$si_3 = \sin\left[\frac{1}{2} \arg(x_3)\right] \sqrt{|x_3|} \quad (31)$$

当 $\alpha > 4.199\ 651$ 时,有

$$\varphi = C_1 \sin(\sqrt{-x_1} \theta) + C_2 \cos(\sqrt{-x_1} \theta) + C_3 e^{-\sqrt{x_2} \theta} + C_4 e^{\sqrt{x_2} \theta} + C_5 e^{-\sqrt{x_3} \theta} + C_6 e^{\sqrt{x_3} \theta} \quad (32)$$

式中: $C_1 \sim C_6$ 为待定常数; x_1, x_2, x_3 分别为方程 $x^3 + 2x^2 + x(1 - \alpha^2) + \alpha^2 = 0$ 的 3 个根,且

$$x_1 = 2^{1/3} \frac{\alpha^2}{\alpha_d^{1/3}} + \frac{2^{2/3} - 4}{6} \quad (33)$$

$$x_2 = -\frac{2}{3} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(-1 - 3\alpha^2)}{3 \times 2^{2/3} \alpha_d^{1/3}} - \frac{(1 + i\sqrt{3})\alpha_d^{1/3}}{3 \times 2^{4/3}} \quad (34)$$

$$x_3 = \frac{\alpha_d^{1/3}}{3 \times 2^{1/3}} - \frac{2^{1/3}(-1 - 3\alpha^2)}{3\alpha_d^{1/3}} - \frac{2}{3} \quad (35)$$

其中

$$\alpha_d = 2 - 45\alpha^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{-8\alpha^2 + 71\alpha^4 - 4\alpha^6} \quad (36)$$

对于图 1 所示一端固定、一端自由、圆心角为 θ_0 的曲梁,其边界条件为

$$\varphi|_{\theta=0} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=0} = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \theta^3} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad (40)$$

$$\left. \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^4} \right|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad (41)$$

$$\left. \frac{\partial^5 \varphi}{\partial \theta^5} \right|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad (42)$$

将边界代入式(33)~(35)可得3组方程,每一组方程包含6个线性常系数方程,用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{61} & \cdots & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_6 \end{bmatrix} = 0 \quad (43)$$

式中 d_{ij} 为第 i 个方程中 C_j 的系数。

首先可得式(43)的平凡解: $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0$ 。其次,当通解的系数不全为0时,系数矩阵的行列式为0,则特征方程为

$$\det(D) = \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{61} & \cdots & d_{66} \end{vmatrix} = 0 \quad (44)$$

式(44)是一个复杂的超越方程。

解式(44)可得无穷个 α 。将式(44)的第 r 个解记为 α_r ,使用数值方法可得到不同区间内的 α_r ,进而得到第 r 阶模态的无阻尼固有频率为

$$\omega_r = \frac{\alpha_r \sqrt{2YI}}{\sqrt{m}} \quad (45)$$

将 C_6 定义为模态幅值常数。在满足式(44)的条件下振型函数各系数可表示为 $C_1 = D_1 C_6$ 、 $C_2 = D_2 C_6$ 、 $C_3 = D_3 C_6$ 、 $C_4 = D_4 C_6$ 、 $C_5 = D_5 C_6$ 、 $D_1 \sim D_5$ 的表达式可通过求解每组方程中的前5个方程得到。

3 模态坐标下的机电耦合方程与其稳定解

基于第2节的分析,双晶片压电悬臂曲梁相对于基础振动的响应可以写成级数形式:

$$v_{\text{rel}}(\theta, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r(\theta) \eta_r(t) \quad (46)$$

式中: $\varphi_r(\theta)$ 为第 r 阶模态的质量归一化本征函数; $\eta_r(t)$ 为模态坐标。 $\varphi_r(\theta)$ 中的模态幅值常数 C_6 可使用归一化条件求出:

$$\int_0^\theta \varphi_s \frac{\partial^6 \varphi_r}{\partial \theta^6} + 2 \int_0^\theta \varphi_s \frac{\partial^4 \varphi_r}{\partial \theta^4} + \int_0^\theta \varphi_s \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial \theta^2} = \alpha_r^2 \delta_{rs} \quad (47)$$

$$\int_0^\theta \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} + \int_0^\theta \varphi_r \varphi_s = \delta_{rs} \quad (48)$$

式(47)、(48)是通过将第 r 阶模态函数 φ_r 代入式(22),并在等式两端乘以第 s 阶模态函数 φ_s 分部积分后得到,其中 δ_{rs} 是 Kronecker 符号。

将式(46)代入式(20)中,并使用归一化条件,可得模态坐标下的耦合曲梁方程为

$$m \ddot{\eta}_r + c_s I_s \alpha_r^2 \dot{\eta}_r + 2 \alpha_r^2 Y I \eta_r - \vartheta_s \chi_r V = f_r \quad (49)$$

式(49)中的与机电耦合项 χ_r 为

$$\chi_r = \varphi_r(\theta) \big|_{\theta=\theta_0} + \varphi_r''(\theta) \big|_{\theta=\theta_0} \quad (50)$$

模态力函数 f_r 为

$$f_r = m \left[x(t) + x''(t) \right] \int_0^{\theta_0} \sin(\theta) \varphi_r(\theta) d\theta - m \left[y(t) + y''(t) \right] \int_0^{\theta_0} \cos(\theta) \varphi_r(\theta) d\theta \quad (51)$$

同样,将式(46)代入式(21)中,使用正交条件,可得模态坐标下的耦合电路方程为

$$\vartheta_s \sum_{r=1}^{\infty} \chi_r \dot{\eta}_r + \frac{\epsilon_{33} b R_0 \theta_0}{2 h_p} \dot{V} + \frac{V}{R} = 0 \quad (52)$$

在俘能器的工作过程中,假设水平方向与竖直方向的激励都是简谐激励,分别为 $x(t) = X_0 e^{j\omega t}$ 和 $y(t) = Y_0 e^{j\omega t}$ 。其中 X_0 与 Y_0 分别为水平与数值方向的激励幅值, ω 为激励频率。假设电压的响应为 $V(t) = V_0 e^{j\omega t}$,模态坐标的响应为 $\eta_r(t) = H_r e^{j\omega t}$,其中 V_0 与 H_r 为复数, j 为单位虚数。由式(49)、(52)可得

$$(-m\omega^2 + j\omega c_s I_s \alpha_r^2 + 2\alpha_r^2 Y I) H_r + \chi_r V_0 = F_r \quad (53)$$

$$j\omega \sum_{r=1}^{\infty} \vartheta_s \chi_r H_r + \left(\frac{\epsilon_{33} b R_0 \theta_0}{2 h_p} j\omega + \frac{1}{R} \right) V_0 = 0 \quad (54)$$

式中 F_r 为模态激励力的幅值。由式(51)可得

$$F_r = m \left[X_0 - \omega^2 X_0 \right] \int_0^{\theta_0} \sin(\theta) \varphi_r(\theta) d\theta - m \left[Y_0 - \omega^2 Y_0 \right] \int_0^{\theta_0} \cos(\theta) \varphi_r(\theta) d\theta \quad (55)$$

由式(54)可得 H_r ,将其代入方程(53)可得 V_0 ,进而可得电压响应 $V(t)$ 为

$$V(t) = V_0 e^{j\omega t} = \frac{j\omega \sum_{r=1}^{\infty} \vartheta_s \chi_r \frac{F_r}{\omega^*}}{j\omega \sum_{r=1}^{\infty} \vartheta_s \frac{\chi_r^2}{\omega^*} - \frac{\epsilon_{33} b R_0 \theta_0}{2 h_p} j\omega - \frac{1}{R}} e^{j\omega t} \quad (56)$$

其中

$$\omega^* = -m\omega^2 + j\omega c_s I_s \alpha_r^2 + 2\alpha_r^2 Y I \quad (57)$$

4 压电曲梁俘能器的俘能效果分析

利用第3节模态坐标下的机电耦合方程及其求解的分析结果,可以对俘能器的电压响应、功率响应与激励频率、负载电阻之间的关系进行比较全面的

讨论。

假定悬臂曲梁的金属基础层为黄铜,压电陶瓷层为PZT-5A。曲梁俘能器的具体几何参数与材料特性如表1所示。俘能器的阻尼系数 c_s 可以通过对数衰减法^[12]、奈奎斯特图^[13]或其他可行的方法来识别。本文将俘能器的 c_s 取为1。

表1 俘能器的材料与结构参数

材 料	PZT-5A	黄铜
弹性模量(c_{11}, E_m)/GPa	60.6	105.0
密度(ρ_p, ρ_s)/(kg·m ⁻³)	7 500	9 000
压电常数 e_{31} /(C·m ⁻²)	-16.6	—
介电常数 ϵ_{33} /(nF·m ⁻¹)	25.55	—
半径 R_0 /m	0.05	0.05
整体角度 θ_0 /(π rad)	1.5	1.5
宽度 b /m	0.02	0.02
厚度(h_p, h_s)/mm	0.265	0.140

在表1给定的参数下,俘能器的前两阶固有频率 $f_1=206.9\text{ Hz}$ 、 $f_2=500.6\text{ Hz}$ 。因此,本文选取的频率分析范围为 $100\sim 800\text{ Hz}$; x 、 y 方向的激励幅值为 1 mm ;电阻的取值范围为 $100\ \Omega\sim 10\text{ M}\Omega$ 。

图2为电压响应幅值随激励频率变化的规律。由图可看出,电压响应幅值随着电阻的增大而增大。这一现象可以解释为:随着电阻的增大,俘能器与激励发生共振的频率也增大。共振频率从负载电阻趋近于0的短路共振频率增大到负载电阻趋近于无穷大时的开路共振频率。此规律与直梁俘能器相似^[9],这说明了本文所得曲梁俘能器动力学模型与求解结果的合理性。

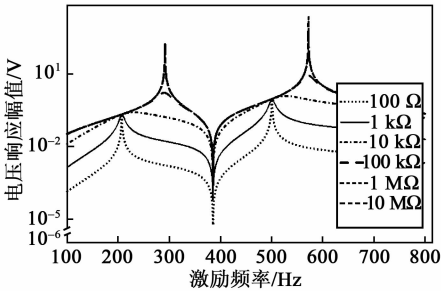


图2 俘能器电压响应幅值随频率的变化曲线

由式(4)可得输出功率的响应幅值为

$$P = \frac{V_0^2}{R} = \frac{1}{R} \left[\frac{j\omega \sum_{r=1}^{\infty} \vartheta_s \chi_r \frac{F_r}{\omega^*}}{j\omega \sum_{r=1}^{\infty} \vartheta_s \frac{\chi_r^2}{\omega^*} - \frac{\epsilon_{33} b R_0 \theta_0}{2 h_p} j\omega - \frac{1}{R}} \right]^2 \quad (58)$$

图3为俘能器功率响应随激励频率的变化曲线。由图可看出,当负载电阻阻值为定值时,输出功

率仍在共振时达到最大,但输出功率并不随着负载电阻的增大而增大。

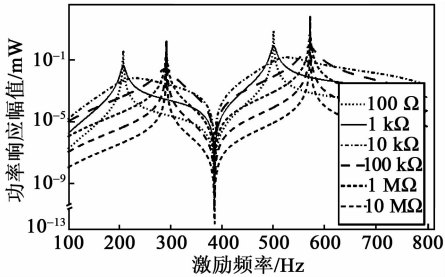


图3 俘能器功率响应幅值随频率的变化曲线

图4为激励频率保持不变,只改变电阻阻值时电压响应幅值的变化。由图可看出,无论基础激励的频率取何值,当电阻阻值超过 $10\text{ M}\Omega$,电压响应均趋于一条水平线,即俘能器趋于开路状态;当电阻阻值趋近于0时,电压响应也趋近于0,即俘能器趋于短路状态。

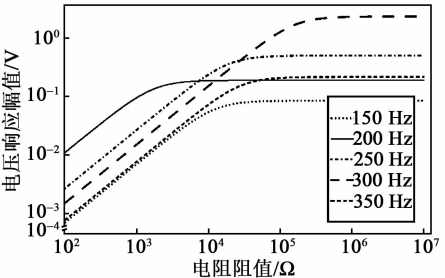


图4 俘能器电压响应幅值随电阻阻值的变化曲线

图5为在一定的激励频率下输出功率与负载电阻阻值之间的关系。由图可看出,当激励频率不变时,随着负载电阻的增加,俘能器的功率呈现先增大后减小的趋势。这说明在一定的激励频率下,悬臂曲梁俘能器存在一个使俘能器输出功率达到最大值的最优电阻值。

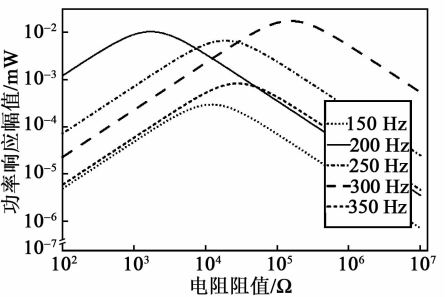


图5 俘能器功率响应幅值随电阻阻值的变化曲线

分析可知,曲梁俘能器的电压、功率响应与悬臂直梁俘能器有一定相似之处,说明本文所得到的结论符合同类器械的基本规律。

综上所述可知,负载电阻对悬臂曲梁俘能器的电压与功率响应都具有较大影响。因此可以根据激

励频率选择合适的负载电阻,从而使输出功率达到最大化。

5 结束语

本文建立了压电曲梁俘能器的机电耦合偏微分方程,分析了一端固定、一端自由、圆心角为任意值的压电曲梁的模式,得到了系统固有频率表达式。

利用模式函数将压电曲梁俘能器的机电耦合偏微分方程转化为模式坐标下的常微分方程,求解了在基础简谐振动下,压电曲梁俘能器的电压响应与位移响应的稳态解。

计算实例说明,利用本文提出的方法可对俘能器的电路参数与俘能器的性能之间的关系进行分析。

本文需要进一步深入研究的工作包括利用实验的方法验证本文提出方法的适用性,考虑非线性因素的影响等。

参考文献:

- [1] MATEU L, ECHETO M, DE BORJA F. Review of energy harvesting techniques and applications for microelectronics[C]//Sevilla, Spain: International Society for Optical Engineering, 2005.
- [2] ROUNDY S, WRIGHT P K. A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics[J]. Smart Materials and Structures, 2004, 13(5): 1131-1142.
- [3] ERTURK A, INMAN D J. A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2008, 130(4): 1257-1261.
- [4] 贺学锋, 温志渝, 温中泉. 压电式振动发电机的建模及应用[J]. 光学精密工程, 2009, 17(6): 1436-1441.
HE Xuefeng, WEN Zhiyu, WEN Zhongquna. Modeling

and application of piezoelectric vibration-based power generator[J]. Optics and Precision Engineering, 2009, 17(6): 1436-1441.

- [5] 刘祥建, 陈仁文. Rainbow 型压电换能结构的有限元分析与实验[J]. 光学精密工程, 2011, 19(4): 789-796.
LIU Xiangjian, CHEN Renwen. Finite element analysis and experiments on Rainbow shape piezoelectric energy transferring elements[J]. Optics and Precision Engineering, 2011, 19(4): 789-796.
- [6] 周勇, 李实, 周北岳. 一种悬臂曲梁压电俘能器研究[J]. 压电与声光, 2014, 36(2): 237-240.
ZHOU Yong, LI Shi, ZHOU Beiyue. Study on a piezoelectric curve cantilevered beam harvester[J]. Piezoelectrics & Acousto-optics, 2014, 36(2): 237-240.
- [7] 刘祥建. 多方向压电振动能量收集方法及性能优化关键技术研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2012.
- [8] CHIDAMPARAM P, LEISSA A W. Vibrations of planar curved beams, rings, and arches[J]. Applied Mechanics Reviews, 1993, 46(9): 467-483.
- [9] ERTURK A, INMAN D J. Piezoelectric energy harvesting[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 2011.
- [10] 李东旭. 高等结构动力学[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2010: 345-276.
- [11] PREUMONT A. Dynamics of electromechanical and piezoelectric systems[M]. Brussels: Springer, 2006.
- [12] DUTOIT N E, WARDLE B L, KIM S G. Design considerations for MEMS-scale piezoelectric mechanical vibration energy harvesters[J]. Integrated Ferroelectrics, 2005, 71(1): 121-160.
- [13] CHEN S N, WANG G J, CHIEN M C. Analytical modeling of piezoelectric vibration-induced micro power generator[J]. Mechatronics, 2006, 16(7): 379-387.

《压电与声光》广告免费咨询卡

姓名: _____ 职务: _____ 职称: _____ 单位: _____

地址: _____ 邮编: _____ 电话: _____

您对本刊 _____ 年 _____ 期的 ☐ 彩色 ☐ 黑白 ☐ 刊花广告

_____ 公司(厂家) _____ 产品/技术感兴趣

希望: ☐ 索取公司资料 ☐ 索取产品资料 ☐ 询问价格 ☐ 建立业务联系 ☐ 其他 _____

请将卡片寄往(或传真): 《压电与声光》编辑部 读者服务部

通讯地址: 重庆南坪 2513 信箱(400060) 电话: 023-62919570 传真: 023-62803425

复印有效