**文章编号:**1004-2474(2019)01-0098-04

# 基于均一化模型的 MFC 悬臂梁静态变形分析

盛贤君,周少征

(大连理工大学 电气工程学院,辽宁 大连 116023)

摘 要:采用基于平面应力假设和二维周期性位移场假设的均一化模型分析了 P1 型粗压电纤维复合材料 (MFC)致动器的宏观性质,研究了该模型对于 MFC 悬臂梁静态变形分析的适用性。ANSYS 仿真结果表明,该模型适用于分析 MFC 悬臂梁静态变形,采用该均一化模型与不采用均一化模型相比,悬臂梁挠度的相对误差不超过 5.77%,且该均一化模型中压电应力矩阵的 e<sub>32</sub>分量对梁挠度的影响(e<sub>32</sub>效应)为次要因素。在采用该均一化模型的基础上进一步忽略其 e<sub>32</sub>效应与原均一化模型相比,梁挠度的相对误差不超过 1.36%。

关键词:粗压电纤维复合材料(MFC);均一化模型;宏观性质;压电悬臂梁;ANSYS分析 中图分类号:TN384;TM22 文献标识码:A DOI:10.11977/j, issn. 1004-2474. 2019. 01. 024

# Static Deformation Analysis of MFC Cantilever Beam Based on Homogenization Model

#### SHENG Xianjun, ZHOU Shaozheng

(School of Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: The macroscopic properties of the P1-type MFC (Macro Fiber Composite) actuator are analyzed by using the homogenization model based on the plane stress hypothesis and the two-dimensional periodical displacement field assumption. The applicability of the model to the static deformation analysis of the MFC cantilever beam is studied. The ANSYS simulation results show that the model is suitable for analyzing the static deformation of MFC cantilever beam. Compared with the non-homogenization model, the relative error of the cantilever beam deflection is less than 5.77%, and the influence of the  $e_{32}$  component of the piezoelectric stress matrix on the deflection of the beam ( $e_{32}$  effect) is the secondary factor in the homogenization model. On the basis of adopting the homogenization model, when the  $e_{32}$  effect is further ignored, the relative error of the deflection of the beam does not exceed 1.36% compared with the original homogenization model.

Key words:macro fiber composite (MFC); homogenization model; macroscopic property; piezoelectric cantilever beam; ANSYS analysis

### 0 引言

压电纤维复合材料致动器由于兼有压电系数高 和柔韧性好的优点已逐渐在机翼变形与振动控制等 领域取代了单纯材料的压电致动器<sup>[1-2]</sup>。为了准确 获取压电纤维复合材料的宏观性质,需要对其细观 结构进行研究<sup>[3]</sup>。粗压电纤维复合材料(MFC)是 一种由锆钛酸铅压电陶瓷(PZT)纤维、集成电极、环 氧树脂和聚酰亚胺构成的二维周期性压电纤维复合 材料,而均一化技术是根据复合材料的细观结构分 析其宏观性质的有效方法。为了分析 MFC 的宏观 性质,DERAEMAEKER A 等提出了一种基于平面 应力假设和二维周期性位移场假设的 MFC 均一化 模型<sup>[4]</sup>。在实际应用中,由于 MFC 与被驱动的结 构之间存在力学耦合作用,难以完全且严格地满足 上述假设条件。为了研究该均一化模型在实际应用 中的精确性,以 MFC 致动器驱动悬臂梁静态变形 为例,在 ANSYS 中分析了采用该均一化模型与不 采用均一化模型下梁的挠度对比。在该均一化模型 中,P1 型 MFC 仅有 *e*<sub>32</sub>和 *e*<sub>33</sub>两个非零的压电应力 常数,为了进一步简化该模型,提高分析效率,研究

收稿日期:2018-04-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51275073,51321004);国家"973"基金资助项目(2014CB046603)

作者简介:盛贤君(1969-),女,辽宁大连人,教授,博士,主要从事现代电机调速、数字化制造系统等方面的研究。通信作者:周少征 (1993-),男,河南商丘人,硕士生,主要从事压电悬臂梁建模与控制的研究。

了忽略该模型中的 e<sub>32</sub> 效应对于分析 MFC 悬臂梁静态变形挠度精确性的影响。

1 MFC 致动器的结构

由美国兰利研究中心研发的 MFC 致动器是一种高效且柔韧的压电致动器,目前由 Smart Material 公司生产和销售。P1 型 MFC 致动器的结构如 图 1 所示。



图 1 P1型 MFC 致动器的结构

其中,聚酰亚胺层为 MFC 致动器的表皮;铜电极 为交替排列的正负电极,中间由环氧树脂填充;PZT 为并列的长方体粗纤维,型号为 PZT-5A1,中间由环 氧树脂填充。PZT 与铜电极的长度方向相互垂直,各 层之间紧密相接。图 1 中,MFC 致动器各组成部分 的几何、力学和电学参数分别如表 1~4 所示。

表1 聚酰亚胺的几何和力学参数

	, -										
厚度	弹性模	量 泊村	公比	密度 p <sub>k</sub> /							
$h_{ m k}/\mu{ m m}$	$E_{ m k}/{ m GH}$	Pa u	$v_{\rm k}$	$(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$							
40	2.8	0	. 3	1 400							
表 2 环氧树脂的力学和电学参数											
弹性模量	泊松日	化 密度	E $ ho_{ m e}/$	相对介电							
$E_{ m e}/{ m GPa}$	$ ho_{ m e}$	(kg •	$m^{-3}$ )	常数 ε <sub>re</sub>							
2.9	0.3	1 (	065	4.25							
表 3 铜电极的几何和力学参数											
厚度 宽	度 间距	弹性模量	泊松比	密度 $ ho_{ m c}/$							
$h_{ m c}/\mu{ m m}~w_{ m c}/$	$\mu m p_c/\mu m$	$E_{\rm c}/{ m GPa}$	$\upsilon_{\rm c}$	$(kg \cdot m^{-3})$							
18 8	5 500	117.2	0.31	8 890							
表 4 PZT 粗纤维的几何、力学和电学参数											
厚度	宽度	间距 弹性		模量/GPa							
$h_{ m p}/\mu{ m m}$	$w_{ m p}/\mu{ m m}$	$p_{ m p}/\mu{ m m}$ –	$E_1 = E_2$	$E_3$							
190	350	405	54.05	48.30							
剪切模量/GPa 泊松比 密則											
$G_{23} = G_{13}$	$G_2$	$v_{23} = v_{13}$	$v_{12}$	$(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$							
29.41 19.14		0.38 0.41		7 750							
压电常	常数/(pC・N	$N^{-1}$ )	<sup>-1</sup> ) 相对介								
$d_{32} = d_{31}$	$d_{33}$	$d_{15} = d_{24} \epsilon_{15}$	$1/\epsilon_0 = \epsilon_{22}/\epsilon_{22}$	$\epsilon_0 = \epsilon_{33}/\epsilon_0$							
-185	440	560	1 902	1 850							

表 4 中,下标 1、2 和 3 表示的方向如图 1 所示, 超过 3 的下标按 IEEE 标准定义。

2 MFC 的均一化模型

采用均一化模型分析 MFC 悬臂梁的静态变形 需要先利用 MFC 的典型体积单元(RVE)获得其均 一化的宏观性质参数。P1 型 MFC 的 RVE 的结构 如图 2 所示,其均一化模型如图 3 所示。



图 3 P1型 MFC 的均一化模型

图 3 中, E 为 MFC 的均一化电场强度大小, U 为施加在 MFC 相邻铜电极上的电压大小。采用平 面应力假设: MFC 在 1 方向上的正应力(T<sub>1</sub>)为 0, 则 MFC 的均一化压电方程<sup>[4-5]</sup>为

$\lceil \overline{T}_2 \rceil$		$\left[c_{22}^{(\mathrm{SC})}*\right]$	$c_{23}^{\rm (SC)*}$	0	0	0	$\frac{-e_{32}^*}{p_{\rm c}}$	$\left\lceil \overline{S}_{2} \right\rceil$
$\overline{T}_{3}$		$c_{23}^{(SC)} *$	$c^{\rm (SC)*}_{33}$	0	0	0	$\frac{-e_{33}^*}{p_{\rm c}}$	$\overline{S}_3$
$\left  \begin{array}{c} \overline{T}_4 \\ \overline{T} \end{array} \right $		0	0	$c_{44}^{\rm (SC)}*$	0	0	0	$\overline{S}_4$
1 <sub>5</sub>		0	0	0	$c_{55}^{\rm (SC)}*$	0	0	$S_5$
$\overline{T}_{6}$		0	0	0	0	$c_{66}^{\rm (SC)} *$	0	$\overline{S}_6$
$\overline{D}_{3}$		$e_{32}^*$	$e_{33}^{*}$	0	0	0	$\frac{\varepsilon_{33}^*}{p_c}$	$\lfloor U \rfloor$
								(1)

式中:*c* 为刚度矩阵元素,其下标按 IEEE 标准定义, 上标(SC)为 MFC 致动器处于电压受钳制的工作状态,\* 表示各参数是在平面应力假设条件下的参数, 与常规的三维模型参数不同; $\overline{T}_i(i = 2, \dots, 6)$ 和  $\overline{S}_i(i = 2, \dots, 6)$ 分别为 RVE 中对应的应力和应变 分量的体积平均值; $\overline{D}_3$ 为 RVE 中电位移矢量的方 向 3 分量的体积平均值,即

$$\overline{T}_{i} = \frac{1}{V_{\text{RVE}}} \int_{V_{\text{RVE}}} T_{i} \mathrm{d}V$$
(2)

$$\overline{S}_{i} = \frac{1}{V_{\text{RVE}}} \int_{V_{\text{RVE}}} S_{i} \mathrm{d}V$$
(3)

$$\overline{D}_{3} = \frac{1}{V_{\rm RVE}} \int_{V_{\rm RVE}} D_{3} \,\mathrm{d}V \tag{4}$$

式中:  $V_{\text{RVE}}$ 为 RVE 的体积;  $T_i$  ( $i = 2, \dots, 6$ )和  $S_i$  ( $i = 2, \dots, 6$ )分别为 RVE 中对应的应力和应变 分量;  $D_3$ 为 RVE 中电位移矢量的方向 3 分量。

P1型 MFC 的 RVE 仅在 2 和 3 方向上是周期 性排列的,因此,MFC 的均一化模型也是建立在二 维的周期性位移场假设条件下。式(1)中 MFC 的 均一化参数可通过设置 6 种不同的周期性位移场 边界条件来求取,这 6 种边界条件分别令  $\overline{S}_2$ , $\overline{S}_3$ ,  $\overline{S}_4$ , $\overline{S}_5$ , $\overline{S}_6$  和U这 6 个量中的一个等于1,其余量等 于 0。在 ANSYS 中可利用结点约束方程设置 MFC 的周期性位移场边界条件,其具体形式可以 参见文献[6]。需要注意的是,因为 MFC 在方向 1 上不是周期性的,所以方向 1 上的位移场也不是 周期性的,故在方向 1 上不能设置周期性边界条 件。图 4 为在 ANSYS 中设置这 6 种周期性边界 条件下解出 MFC 的均一化材料参数所需的应力 分量和电位移矢量。



6. 82 GPa,  $c_{66}^{(SC)*} = 2.99$  GPa,  $e_{32}^* = -0.51$  C/m<sup>2</sup>,

 $e_{33}^* = 15.32 \text{ C/m}^2$ ,  $\epsilon_{33}^*/\epsilon_0 = 1.525.19$ .

3 MFC 悬臂梁静态变形分析

为了研究基于平面应力假设和二维周期性位移 场假设的均一化模型在 MFC 悬臂梁静态变形分析 中的适用性,在 ANSYS 中建立了一个利用 MFC 致 动器驱动一个同等面积的厚为 1 mm 的铝悬臂梁仿 真模型,此 MFC 致动器在图 1 中的 2 和 3 方向上分 别包含 5 和 20 个 RVE。仿真中考虑了 MFC 致动 器的聚酰亚胺层和铜电极层,并且 MFC 致动器与 铝悬臂梁由一层厚为 18 μm 的环氧树脂粘接。

MFC 的均一化参数是基于平面应力假设的,不同于常规的三维模型参数,因此在使用 MFC 的均一化模型进行 ANSYS 仿真时进行了一些特殊的设置,具体包括:

1) 在输入 MFC 材料属性时,令  $c_{11} = 1$  Pa、  $\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_0} = 1$ ,已经求得的均一化参数直接按照 ANSYS 的材料矩阵定义方法设为材料参数,其余 参数均设置为 0。

2)利用结点约束方程使 MFC 的均一化压电材 料区域的 S<sub>1</sub> 为 0。

以上设置考虑了 MFC 的均一化模型中电场只 有方向 3 上的分量和平面应力假设,且能够保证材 料刚度矩阵和介电常数矩阵的正定型。

为了验证均一化模型的有效性,分别分析不采 用均一化模型和采用均一化模型条件下 MFC 悬臂 梁的挠度。其中采用均一化模型分析按以上方法给 MFC 设置了均一化的宏观参数;不采用均一化模型 分析则给 MFC 的各组成部分分别设置了相应的材 料参数。同时,由第 2 节中仿真得到 MFC 的均一 化宏观参数可知, e<sub>32</sub> 远小于 e<sub>33</sub>。为了研究,忽略 e<sub>32</sub> 对采用均一化模型分析 MFC 悬臂梁静态变形挠度 精确性的影响,仿真分析了在采用均一化模型基础 上令 e<sub>32</sub> =0 时 MFC 悬臂梁的挠度。其中 MFC 致 动器的驱动电压均设为 1 000 V,3 种情况下粱的挠 度如图 5 所示。根据图 5 中的仿真结果可以得到 3 种情况下粱的挠度曲线对比,如图 6 所示。



(a) 不采用均一化模型MFC悬臂梁的挠度



图 6 MFC 悬臂梁 3 种情况下的挠度曲线对比

图 6 中,U<sub>x</sub> 为梁的挠度。根据图 6 可知,采用 基于平面应力假设和二维周期性位移场假设的均一 化模型分析 MFC 悬臂梁的静态变形具有很高的精 确性,采用该均一化模型与不采用均一化模型相比, 梁的挠度的最大相对误差仅为 5.77%。且忽略该 模型中的 e<sub>32</sub>效应对于分析 MFC 悬臂梁静态变形的 精确性影响很小,采用均一化模型且令 e<sub>32</sub> = 0 与采 用原均一化模型相比,梁的挠度的最大相对误差仅 为 1.36%。对于某些需要利用 C 等常用编程语言 编程分析 MFC 悬臂梁挠度的研究,在 MFC 的整个 压电应力常数矩阵 e<sup>\*</sup> 中可以只考虑 e<sub>33</sub>,从而进一 步减小分析的计算量。

4 结论

采用基于平面应力假设和周期性位移场假设的 均一化模型分析了 P1 型 MFC 的宏观性质,给出了 计算该均一化模型材料参数的方法和利用该均一化 模型进行 MFC 悬臂梁 ANSYS 仿真的设置方法。 分析了采用该均一化模型、不采用均一化模型及在 采用该均一化模型基础上忽略 e32 效应 3 种情况下 MFC 悬臂梁的挠度。根据以上仿真分析结果可得 如下结论:

1)采用基于平面应力假设和二维周期性位移 场假设的均一化模型分析 MFC 悬臂梁静态变形是 可行的,采用该均一化模型仿真与不采用均一化模型仿真的 MFC 悬臂梁静态变形的挠度的相对误差 不超过 5.77%。

2)在精度允许范围内,使用均一化模型分析 P1型 MFC 悬臂梁静态变形挠度时可忽略其 e<sub>32</sub>效应,从而进一步简化模型,提高分析效率。采用均一 化模型且忽略其 e<sub>32</sub>效应与采用原均一化模型相比, 粱挠度的相对误差不超过 1.36%。

## 参考文献:

- [1] 王晓明,周文雅,吴志刚. 压电纤维复合材料驱动的机 翼动态形状控制[J]. 航空学报,2017,38(1):154-162.
   WANG Xiaoming, ZHOU Wenya, WU Zhigang. Dynamic shape control of wings using piezoelectric fiber composite materials[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica,2017, 38 (1):154-162.
- [2] 高恒烜,王莹,李书,等. 压电复合材料机翼振动控制研究[J]. 振动、测试与诊断,2013,33(增1):107-110.
   GAO Hengxuan, WANG Ying, LI Shu, et al. The research on vibration control of wings using pizoelectric compostite[J]. Journal of Vabration Measurement & Diagnosis,2013,33(suppl.1):107-110.
- [3] 陈玉丽,马勇,潘飞,等. 多尺度复合材料力学研究进展
  [J].固体力学学报,2018,39(1):1-68.
  CHEN Yuli,MA Yong,PAN Fei,et al. Research progress in multi-scale mechanics of composite materials
  [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2018, 39(1):
  1-68.
- [4] DERAEMAEKER A, NASSER H. Numerical evaluation of the equivalent properties of macro-fiber composite(MFC) transducers using periodic homogenization[J]. International Journal of Solids & Structures, 2010,47(24):3272-3285.
- [5] RASATH S, AROCKIARJIAN A. Effective electromecha-nical response of macro-fiber composite(MFC): analytical and numerical models[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2013, 77(77):98-106.
- [6] 张超,许希武,严雪. 纺织复合材料细观力学分析的一 般性周期性边界条件及其有限元实现[J]. 航空学报, 2013,34(7):1636-1645.

ZHANG Chao, XU Xiwu, YAN Xue. General periodical boundary conditions and their application to micromechanical finite element analysis of textile composites [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 34 (7):1636-164.