文章编号:1004-2474(2019)01-0150-07

强跟踪五阶 CKF 算法在初始对准中的应用

王律化,石志勇,宋金龙,王海亮
(陆军工程大学 石家庄校区七系,河北 石家庄 050001)

摘　要:针对载体行进间初始对精对准过程易受有色噪声影响,造成对准精度高的问题,提出一种基于高阶球面-径向积分的强跟踪滤波方法,该算法基于里程计辅助下惯性系行进间精对准误差模型,将状态变量的自相关函数进行正交化运算,保证噪声信号的白化,并运用五阶球面-径向准则对于滤波过程中参数的后验概率密度函数进行近似数值计算。仿真实验表明,在方位角为大失准角的条件下,该算法可以有效地保证较高的滤波精度,并且在噪声未知的情况下,滤波器保证很好的鲁棒性。

关键词:惯性导航;精对准;误差模型;强跟踪五阶容积滤波
中图分类号:TN713;TM930;V249.3　**文献标识码**:A　**DOI**:10.11977/j.issn.1004-2474.2019.01.034

Application of Strongly Tracking 5-order CKF Algorithm in Inertial Navigation

WANG Lyuhua, SHI Zhiyong, SONG Jinlong, WANG Hailiang
(No. 7 Dept., PLA Army Engineering University at Shijiazhuang, Shijiazhuang 050001, China)

Abstract: Aiming at the problem that the initial precision alignment of the carrier is susceptible to the colored noise and the alignment accuracy is high, a kind of strong tracking filtering method which is based on higher order sphere -radial integral is proposed in this paper. The algorithm is based on the precision alignment error model of the moving inertial frame under the aid of the odometer. The autocorrelation function of the state variable takes an orthogonal transformation, which guarantees the noise signal is the Gaussian white noise, and the approximate numerical calculation of the posterior probability density function of the parameters in the filtering process is carried out by using the 5-order sphere-radial criterion. The simulation results show that the proposed algorithm can effectively guarantee higher filtering accuracy under the condition that the azimuth angle is large misalignment angle and the filter guarantees good robustness when the noise is unknown.

Key words: inertial navigation; precision alignment; error model; strongly tracking 5-order CKF

0　引言

惯性导航初始对准是确定初始导航参数的过程,分为粗对准和精对准两个阶段。精对准通过分析各个误差源对于对准结果的影响,进一步修正姿态矩阵。现阶段,精对准的研究主要集中在大失准误差模型和非线性误差模型的滤波算法方面。静基座条件下,系统误差模型主要是 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 的小角度误差模型,运用误差角为小角度的特点,可将误差模型进行线性化,满足线性卡尔曼滤波的要求,完成初始对准。随着载体机动性要求的提高,初始对准由静基座初始对准逐渐向行进间初始对准转化,小失准角的误差模型和线性的滤波方法已不能满足初始对准的要求。

针对上述情况,研究大失准角条件下的误差模型和处理大失准角误差模型的滤波算法,成为精对准研究的热点问题。针对大失准角误差模型,基于欧拉角的理论[1],推导了静基座条件下,3 个失准角都是大角度的误差模型。运用四元数理论[2-3],推导了基于加性四元数的捷联惯导误差模型。针对大失准角误差模型的非线性滤波问题,在高斯白噪声条件下,主要的滤波方法是贝叶斯滤波。在贝叶斯滤波结构下,针对滤波参数后验概率密度函数不同的数值解算方法,演变出了扩展卡尔曼滤波[4]、粒子滤波[5]、无迹卡尔曼滤波等不同滤波方法。2009 年,

收稿日期:2018-04-16
基金项目:军内预研基金资助项目(9140A09031715JB34001)
作者简介:王律化(1989-),男,河北行唐人,硕士生,主要从事自行火炮初始对准的研究。E-mail:812564601@qq.com。

文献[6]提出了基于三阶的球体-径向准则的容积滤波(CKF)，但三阶的 CKF 对于状态参数采用如 $x_1^2x_2^2$ 这种简单多项式近似的滤波效果不好。为提高估计精度，文献[7]中基于 Genz[8] 的高维数值积分方法，推导了高阶容积滤波(HCKF)法，提高滤波精度，该方法和同阶的高斯黑米特(GHKF)有着相近的计算精度，但提高了计算效能。当系统噪声发生变化，不满足高斯白噪声假设时，如果运用 HCKF，易造成滤波器的发散。对于非白噪声情况，文献[9]中运用强跟踪滤波(STF)，采用自适应渐消因子调整增益矩阵，减少噪声突变引起滤波器的发散。

本文针对载体行进间初始对准精度问题，在由里程计辅助惯性系统行进间精对准的情况下，推导了精对准误差模型，并建立了导航系统精对准的状态方程和量测方程。系统方程为非线性方程，系统状态的估计采用贝叶斯滤波方式，为提高滤波器在非白噪声条件下的鲁棒性，在计算贝叶斯滤波过程中的增益矩阵时引入自适应渐消因子。滤波过程中需要对于参量的后验概率密度进行数值解算，为提高解算精度，运用五阶球面-径向准则进行计算。仿真和实验结果表明，在方位角为大失准角的条件下，该算法可有效地保证较高的滤波精度，并且在噪声未知的情况下，滤波器保持很好的鲁棒性。

1　行进间捷联惯导系统初始对准误差模型

导航坐标系(n 系)采用东-北-天坐标系，载体坐标系(b 系)采用右-前-上坐标系。计算导航坐标系(n' 系)和导航坐标系之间的误差角 $\boldsymbol{\Phi}=(\Phi_E, \Phi_N, \Phi_U)^{\mathrm{T}}$，转换矩阵表示为 $\boldsymbol{C}_n^{n'}$。导航坐标系速度误差 $\delta\boldsymbol{v}^n=(\delta v_E^n, \delta v_N^n, \delta v_U^n)^{\mathrm{T}}$，航位推算坐标系($m$ 系)速度误差 $\delta\boldsymbol{v}_D^n=(\delta v_{DE}^n, \delta v_{DN}^n, \delta v_{DU}^n)^{\mathrm{T}}$，位置误差在导航坐标系中表示为 $\delta\boldsymbol{P}^n=[\delta P_E^n \quad \delta P_N^n]^{\mathrm{T}}$，航位推算误差在导航坐标系中表示为 $\delta\boldsymbol{P}_D^n=[\delta P_{DE}^n \quad \delta P_{DN}^n]$。假设航位推算坐标系和载体坐标系重合，则里程计的主要误差源是刻度系数误差(δK)，初始对准阶段为一个随机常数。加速度计误差表示为常值零位偏差 ∇^b 和其白噪声 w_a^b 之和，陀螺误差为陀螺的常值漂移误差 ε^b 和其白噪声 w_ω^b 之和。捷联惯导系统完成行进间粗对准后，根据姿态矩阵的解算，水平失准角是小角度，方位失准角为大角度。因此，行进间初始对准精对准的过程中，其误差模型应使用大方位角误差模型。根据文献[1]、[10]，行进间捷联惯导大方位角误差模型为

$$\begin{cases}\dot{\varphi}=\boldsymbol{C}_\omega^{-1}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_n^{n'})\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{in}^n+\boldsymbol{C}_n^{n'}\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n- \\ \qquad \boldsymbol{C}_b^{n'}\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b+\boldsymbol{C}_b^{n'}\boldsymbol{w}_a^b) \\ \delta\dot{\boldsymbol{v}}^n=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_{n'}^n)\boldsymbol{C}_b^{n'}\boldsymbol{f}_{sf}^b-(2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n)\times\delta\boldsymbol{v}^n- \\ \qquad (2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n+\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n)\times(\tilde{\boldsymbol{v}}^n-\delta\boldsymbol{v}^n)+\boldsymbol{C}_b^{n'}\boldsymbol{w}_g^b \\ \qquad \delta\dot{\boldsymbol{P}}^n=\boldsymbol{M}_1\delta\boldsymbol{v}^n+\boldsymbol{M}_2\delta\boldsymbol{P}^n \\ \delta\dot{\boldsymbol{P}}_D^n=\boldsymbol{M}_1\delta\boldsymbol{v}_D^n+\boldsymbol{M}_2\delta\boldsymbol{P}_D^n \\ \dot{\boldsymbol{\nabla}}^b=0 \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^b=0 \\ \delta\dot{K}_D=0\end{cases} \tag{1}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_n^{n'}=\begin{bmatrix}\cos\Phi_U & \sin\Phi_U & -\Phi_N \\ -\sin\Phi_U & \cos\Phi_U & \Phi_E \\ \Phi_N\cos\Phi_U+\Phi_E\sin\Phi_U & \Phi_N\sin\Phi_U-\Phi_E\cos\Phi_U & 1\end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{C}_\omega^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \Phi_N \\ 0 & 1 & -\Phi_E \\ -\Phi_N & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n=\begin{bmatrix}-\dfrac{\delta v_N^n}{R_M+h} \\ \dfrac{\delta v_E^n}{R_N+h} \\ \dfrac{\delta v_E^n\tan\tilde{L}+\tilde{v}_E^n\sec^2 L\delta L}{R_N+h}\end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\delta\boldsymbol{v}_D^n=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_{n'}^n)\boldsymbol{C}_b^{n'}\boldsymbol{v}_D^m+\boldsymbol{C}_b^{n'}\delta K\boldsymbol{v}_D^m \tag{5}$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n=\begin{bmatrix}0 \\ -\omega_{ie}\sin L\delta L \\ \omega_{ie}\cos L\delta L\end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^b=\begin{bmatrix}\nabla_x \\ \nabla_y \\ \nabla_z\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^b=\begin{bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{R_M+h} & 0 \\ \dfrac{\sec L}{R_N+h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{v_N}{(R_M+h)^2} \\ \dfrac{v_E\sec L\tan L}{R_N+h} & 0 & \dfrac{v_E\sec L}{(R_M+h)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

取状态向量 $\boldsymbol{x}=[\varphi \quad (\delta \boldsymbol{v}^n) \quad (\delta \boldsymbol{P}^n) \quad (\delta \boldsymbol{P}_D^n) \quad \boldsymbol{\nabla}^b \quad \boldsymbol{\varepsilon}^b \quad \delta K_D]^{\mathrm{T}}$，其中$[\,]^{\mathrm{T}}$ 为状态向量的转置。

噪声向量为

$$\boldsymbol{w}=[(\boldsymbol{w}_a^b)_{1\times3}^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{w}_g^b)_{1\times3}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{0}_{1\times11}]^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

捷联惯导实测位置和里程计的实测位置的差值作为量测值

$$z=\widetilde{P}-\widetilde{P}_D=\delta P-\delta P_D \tag{12}$$

综上所述，行进间大方位失准角误差方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v} \end{cases} \tag{13}$$

式(13)中 $f(x)$ 的表达式具体见式(1)，其中状态噪声向量 $\boldsymbol{w}$ 和量测噪声 v 是零均值，方差为 Q 和 R 的高斯白噪声。量测矩阵为

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{0}_{3\times3} \quad \boldsymbol{0}_{3\times3} \quad \boldsymbol{I}_{3\times3} \quad -\boldsymbol{I}_{3\times3}\boldsymbol{0}_{3\times3} \quad \boldsymbol{0}_{3\times4}]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

2 贝叶斯滤波过程及其改进方法

2.1 贝叶斯滤波过程

处理式(13)的滤波方法一般为贝叶斯滤波。将式(13)进行离散化处理，则有

$$\begin{cases} x_k=F(x_{k-1})+w_{k-1} \\ z_k=H_k x_k+v_k \end{cases} \tag{15}$$

式中 w_{k-1} 和 v_k 是独立的状态高斯白噪声和量测高斯白噪声，其方差矩阵分别为 Q_{k-1} 和 $\boldsymbol{R}_k$。

式(15)的贝叶斯滤波过程分为以下两步，即

1）预测过程。

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}=\boldsymbol{E}[F(\boldsymbol{x}_{k-1})]=\int_{R_n}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_{k-1})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_{k-1})\mathrm{d}x_{k-1}= \int_{R_n}\boldsymbol{F}(x_{k-1})N(\boldsymbol{x}_{k-1};\boldsymbol{P}_{k-1|k-1})\mathrm{d}x_{k-1} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1}=\boldsymbol{E}[(\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}]= -\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}}+\int_{R_n}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_{x-1})\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_{x-1})\cdot N(\boldsymbol{x}_{x-1};\boldsymbol{P}_{x-1|x-1})\mathrm{d}x_{x-1}+\boldsymbol{Q}_{k-1} \tag{17}$$

2）更新过程。

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}+\boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{z}_k-\hat{\boldsymbol{z}}_k) \tag{18}$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k}=\boldsymbol{P}_{k|k-1}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{P}_{xz}^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{P}_{xz}(\boldsymbol{R}_k+\boldsymbol{P}_{zz})^{-1} \tag{20}$$

$$\hat{\boldsymbol{z}}_k=\boldsymbol{E}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)]=\int_{R_n}\boldsymbol{h}(x_k)N(\boldsymbol{x}_k;\boldsymbol{P}_{k|k-1})\mathrm{d}x_{k-1} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{P}_{xz}=\boldsymbol{E}[(\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{z}_k-\hat{\boldsymbol{z}}_k)^{\mathrm{T}}]=\int_{R_n}\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)\cdot N(\boldsymbol{x}_k;\boldsymbol{P}_{k|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k\backslash k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k\backslash k-1}^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{P}_{zz}=\boldsymbol{E}[(\boldsymbol{z}_k-\hat{\boldsymbol{z}}_k)(\boldsymbol{z}_k-\hat{\boldsymbol{z}}_k)^{\mathrm{T}}]=\int_{R_n}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k)\cdot N(\boldsymbol{x}_k;\boldsymbol{P}_{k|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1}-\hat{\boldsymbol{z}}_{k\backslash k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k\backslash k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_k \tag{23}$$

贝叶斯滤波的预测和更新过程中，都涉及到如下形式的多维微积分：

$$\boldsymbol{I}=\int_{R_n}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})N(\boldsymbol{x};\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{P})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{24}$$

对于式(24)的多维积分计算其解析解几乎不可能，一般是求解式(24)的近似数值解。根据近似求解的方法不同，将式(16)～(23)的滤波过程称为不同的滤波方法。根据容积近似计算方法[6]，系统噪声是高斯白噪声的情况下，可以对式(24)进行如下转换，即

$$\int_{R_n}\boldsymbol{h}(x)N(\boldsymbol{x};\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{P})\mathrm{d}x= \int_{R_n}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}+\hat{\boldsymbol{x}})N(\boldsymbol{x};\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\approx \sum_1^{N_P}W_i\boldsymbol{h}(\boldsymbol{S}\gamma_i+\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{25}$$

式中：$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{S}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的平方根分解；N_{P} 为总采样点数；γ_i 和 W_i 分别为采样点和采样点权重。

由式(25)的解算方法应用到式(16)～(23)得：

预测过程：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}=\sum_1^{N_P}W_i\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}_i) \tag{26}$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1}=\sum_1^{N_P}W_i(f(\xi_i)-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\cdot (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}_i)-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_{k-1} \tag{27}$$

式中：$\boldsymbol{P}_{k-1|k-1}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{S}\gamma_i+\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}$。

更新过程：

$$\hat{\boldsymbol{z}}_k=\sum_1^{N_P}W_i\boldsymbol{h}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i) \tag{28}$$

$$\boldsymbol{P}_{xz}=\sum_1^{N_P}W_i(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{h}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i)-\boldsymbol{z}_k)^{\mathrm{T}} \tag{29}$$

$$\boldsymbol{P}_{zz} = \sum_{1}^{N_P} W_i(\boldsymbol{h}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i) - \boldsymbol{z}_k)(\boldsymbol{h}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i) - \boldsymbol{z}_k)^{\mathrm{T}} \tag{30}$$

式中：$\boldsymbol{P}_{k|k-1} = \tilde{\boldsymbol{S}}\tilde{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{T}}$；$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i = \tilde{\boldsymbol{S}}\gamma_i + \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}$。

式(26)、(27)、(18)～(20)、(28)～(30)构成了贝叶斯滤波器数值解算的全部过程，式中 W_i 和 γ_i 的计算方法，则通过球面-径向准则进行计算。

2.2　强跟踪贝叶斯滤波过程

上述贝叶斯估计，要求系统的噪声是高斯白噪声，但是在实际的工作状态下，系统噪声的统计学特性是未知的，此条件下，使用贝叶斯滤波，使得系统的滤波效果变差甚至造成滤波器的发散。为提高滤波器的鲁棒性，同时，在噪声条件未知的情况下，保持良好的滤波精度。将强跟踪滤波(STF)和高阶容积滤波结合，在保证滤波精度的情况下，使滤波器的鲁棒性得到很好的提升。

将贝叶斯滤波过程的式(17)，(19)，(20)进行等价变形得

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1} = \boldsymbol{F}_{k,k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{F}_{k,k-1} + \boldsymbol{Q}_k \tag{31}$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{P}_{k|k-1} \tag{32}$$

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k)^{-1} \tag{33}$$

式(31)中 $\boldsymbol{F}_{k,k-1}$ 是式(15)中 $f(x_{k-1})$ 的离散化矩阵，表示从 $k-1$ 时刻到 k 时刻的状态一步转移矩阵。

将次优渐消因子 η_k 代入式(31)中得

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1} = \eta_k\boldsymbol{F}_{k,k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}F_{k,k-1} + \boldsymbol{Q}_k \tag{34}$$

根据文献[9]中正交性原理的要求，$\eta_k \geqslant 1$，并且输出的残差序列为 $\delta_k = \boldsymbol{z}_z - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}$，$\eta_k$ 的计算方法为

$$\eta_k = \begin{cases} \eta_0 & \eta_0 \geqslant 1 \\ 1 & \eta_0 < 1 \end{cases} \tag{35}$$

$$\eta_0 = \frac{\mathrm{tr}\left[N_k\right]}{\mathrm{tr}\left[M_k\right]} \tag{36}$$

$$N_k = V_k - \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} - R_k \tag{37}$$

$$\boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{F}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} \tag{38}$$

$$V_k = \begin{cases} \delta_1\delta_1^{\mathrm{T}} & k = 1 \\ \dfrac{\rho V_{k-1} + \delta_k\delta_k^{\mathrm{T}}}{1+\rho} & k \geqslant 1 \end{cases} \tag{39}$$

式中：tr[·]为矩阵迹的计算；$\rho(0 < \rho \leqslant 1)$ 为修正系数，一般情况下 $\rho = 0.95$。在系统噪声未确定的情况下，运用式(40)解算系统噪声，使系统噪声类似于高斯白噪声，从而便于进行解算。

3　五阶容积滤波解算方法

3.1　高维积分的数值计算准则

根据文献[11]，高维积分的数值计算为

$$\int_{R_n} g(x)w_g(x)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \approx \sum_i W_i g(\gamma_i) \tag{40}$$

式中：$\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$；$w_g(x)g(x)$ 的权重函数，$g(x) = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是非负整数，且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \leqslant d$，$d$ 是所能达到的精度的阶数。

根据容积准则，形如式(24)的积分写成下列形式：

$$I(g) = \int_{R_n} g(x)\exp(-x^{\mathrm{T}}x)\mathrm{d}\,x \tag{41}$$

式中 $w_g(x) = \exp(-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})$。令 $\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = 1$，$r = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$，式(41)可变为

$$I(g) = \int_0^{\infty}\int_{U_n} g(r\boldsymbol{s})r^{n-1}\exp(-r^2)\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{s})\mathrm{d}r \tag{42}$$

式中：$\boldsymbol{s} = [s_1, s_2, \cdots, s_n]$；$U_n = \{s \in \mathbf{R}^n: \ s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2 = 1\}$；$\sigma(\cdot)$ 为超球体 U_n 的面积积分元素。

式(42)中主要涉及了两种形式的积分：

1) 径向积分，$\int_0^{\infty} g_r(r)r^{n-1}\exp(-r^2)\mathrm{d}r$ 积分的权重公式为：$w_g(r) = r^{n-1}\exp(-r^2)$。

2) 球面积分 $\int_{U_n} g(s)\mathrm{d}\sigma(s)$，对应的权重函数为：$w_g(s) = 1$。将径向积分和球面积分运用式(40)进行变形，式(42)可变为

$$I(g) = \int_0^{\infty}\int_{U_n} g(r\boldsymbol{s})r^{n-1}\exp(-r^2)\mathrm{d}\sigma(s)\mathrm{d}r = \sum_{i=1}^{N_r}\sum_{j=1}^{N_s} w_{r,i}w_{s,j}g(r_i\boldsymbol{s}_j) \tag{43}$$

式中：r_i 和 $w_{r,i}$ 分别为径向积分的采样点和采样点对应的权值；s_j 和 $w_{s,j}$ 分别为球面积分的采样点和采样点对应的权值。$I(g)$ 的总采样点为 N_{r}、N_{s}，当 r_i 中有一个采样点为 0 时，$I(g)$ 的总采样点数为 $(N_r - 1)(N_s + 1)$。

3.2　五阶球面积分方法

根据文献[8]，形如 $I_{U_n}(g_s) \triangleq \int_{U_n} g_s(s)\mathrm{d}\,\sigma(s)$ 的积分可以按照下式进行近似计算，即

$$I_{U_n, 2m+1}(g_s) = \sum_{|p|=m} w_p G\{u_p\} \tag{44}$$

式(44)为 $2m+1$ 阶球面积分数值解算方法，式中 I_{U_n} 为被解算的函数。式中的权值函数和采样点的函数值之和分别为

$$w_p = I_{U_n}\left(\prod_{i=0}^{n}\prod_{j=0}^{p_i-1}\frac{s_i^2 - u_j^2}{s_{p_i}^2 - u_j^2}\right) \tag{45}$$

$$G\{u_p\} = 2^{-c(u_p)} \sum_v g_s(v_1 u_{p_1}, v_2 u_{p_2}, \cdots, v_n u_{p_n}) \tag{46}$$

式(45)中等号右侧的等式是以 s_i 为变量的球面积分，式(44)、(45)中的 p_i 是一个非负的整数，并且 $|p| = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$。式(46) 中的 $-c(\boldsymbol{u}_p)$ 是采样向量 $\boldsymbol{u}_p = (u_{p_1}, u_{p_2}, \cdots, u_{p_n})$ 中的非零项。为了使采样点最少，根据文献[8]，应使式(46) 中的$v_i = \pm 1$，则 $u_{p_i} = \sqrt{p_i/m}\,(p_i = 0, \cdots, m)$，而采样点 $v_i u_{p_i}$ 的权值就是 $2^{-c(u_p)} w_p$。

根据文献[8]，有如下公式：

$$\int_{U_n} s_1^{k_1} s_2^{k_2} \cdots s_n^{k_n} = 2\frac{\Gamma((k_1+1)/2)\Gamma((k_2+1)/2)\cdots\Gamma((k_n+1)/2)}{\Gamma((|k|+n)/2)} \tag{47}$$

式中：$|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$；$\Gamma(z)$ 是伽马函数，定义 $\Gamma(z) = \int_0^\infty \exp(-\lambda)\lambda^{z-1}\mathrm{d}\lambda$。

当所要近似的积分阶数是五阶时，$2m + 1 = 5$，则 $m = 2$。将结果代入式(45)中得

$$w_{s2} = w_{p(2,0,\cdots,0)} = 2^{-1}\int_{U_n} \frac{s_1^2(s_1^2 - 1/2)}{1/2}\mathrm{d}\sigma = \frac{(4-n)A_n}{2n(n+2)} \tag{48}$$

$$w_{s1} = w_{p(1,1,\cdots,0)} = 2^{-2}\int_{U_n} \frac{s_1^2 s_2^2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\mathrm{d}\,\sigma = \frac{A_n}{n(n+2)} \tag{49}$$

式中 $A_n = \dfrac{2\Gamma^n(1/2)}{\Gamma(n/2)}$。

w_{s1} 所对应的采样点为 $\{s_j^+\} = \left\{\sqrt{\frac{1}{2}}(e_k + e_l): k < l, k, l = 1, 2, \cdots, n\right\}$

和

$$\{\boldsymbol{s}_j^-\} = \left\{\sqrt{\frac{1}{2}}(e_k - e_l): k < l, k, l = 1, 2, \cdots, n\right\}$$

w_{s2} 所对应的采样点为 e_j 和 $-e_j$，其中 $j = 1, 2, \cdots, n$。

将式(48)、(49)及采样点代入式(41)可得

$$I_{U_n,5}(g_s) = w_{s1}\sum_{j=1}^{n(n-1)/2}(g_s(s_j^+) + g_s(-s_j^+) + g_s(s_j^-) + g_s(-s_j^-)) + w_{s2}\cdot\sum_{j=1}^{n}(g_s(e_j) + g_s(-e_j)) \tag{50}$$

3.3 径向积分法则

五阶及五阶以下的高维径向积分，可以使用高斯-拉格朗日积分法，但这个方法不能运用于五阶以上的数值解算，为提高径向高维积分解算方法的适用性，采用时矩匹配法解算径向积分。时矩匹配法具体表示为

$$\int_0^\infty g_r(r) r^{n-1}\exp(-r^2)\mathrm{d}r = \sum_{i=1}^{N_r} w_{r,i} g_r(r_i) \tag{51}$$

式中 $g_r(r) = r^l, r^l \in [0, r^2, \cdots, r^{2(N_r-1)}]$，$l$ 是一个非负偶数。且当 $g_r(r) = r^l$ 时，$\int_0^\infty g_r(r) r^{n-1}\exp(-r^2)\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{n+l}{2})$。

因此，当运用时矩匹配法解算五阶径向高维积分时，得到如下方程：

$$\begin{cases} w_{r,1}r_1^0 + w_{r,1}r_2^0 = \dfrac{1}{2}\Gamma(\dfrac{1}{2}n) \\ w_{r,1}r_1^2 + w_{r,1}r_2^2 = \dfrac{n}{4}\Gamma(\dfrac{1}{2}n) \\ w_{r,1}r_1^4 + w_{r,1}r_2^4 = \dfrac{1}{2}\Gamma(\dfrac{1}{2}n + 1)(\dfrac{n}{2})\Gamma(\dfrac{1}{2}n) \end{cases} \tag{52}$$

式中 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$，由于式(52) 中有 4 个未知数，只有 3 个方程，同时为了保证采用时矩匹配法数值解算径向积分的采样点数最少，可以令 $r_1 = 0$，于是求得式(52)的解为

$$\begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = \sqrt{\dfrac{1}{2}n + 1} \end{cases} \tag{53}$$

$$\begin{cases} w_{r,1} = \dfrac{1}{(n+2)}\Gamma(\dfrac{1}{2}n) \\ w_{r,2} = \dfrac{n}{2(n+2)}\Gamma(\dfrac{1}{2}n) \end{cases} \tag{54}$$

将式(42)、(51)、(53)、(54)代入式(24)中，运用五阶容积规则($N_r = 2, N_s = 2n^2$)解算得

$$\begin{aligned} I = \int_{R_n} h(x)N(x;0,I)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\sum_{i=1}^{N_r}\sum_{j=1}^{N_s} w_{r,i}w_{s,j} \\ g(\sqrt{2}r_i s_j) = \frac{2}{n+2}g(0) + \frac{2}{(n+2)^2}\cdot \\ \sum_{j=1}^{n(n-1)/2}([g(\sqrt{n+2}s_j^+) + g_s(-\sqrt{n+2}s_j^+)] + \\ g_s(\sqrt{n+2}s_j^-) + g_s(-\sqrt{n+2}s_j^-)) + \\ \frac{4-n}{2(n+2)^2}\sum_{j=1}^{n}(g_s(\sqrt{n+2}e_j) + \\ g_s(-\sqrt{n+2}e_j)) \end{aligned} \tag{55}$$

4　仿真和实验

载体在完成行进间精对准的过程中,为了验证强跟五阶 CKF 算法对于载体状态的估计精度和估计时间,以及在噪声未知条件下的鲁棒性,通过和三阶 CKF 算法在系统误差模型确定的条件下,3 个方向失准角的对比及在噪声条件未知的情况下,以航向失准角为例,对比强跟踪五阶 CKF 和三阶 CKF 的估计效果,说明强跟踪五阶 CKF 算法的估计精度和鲁棒性。

4.1　仿真实验

载体总的精对准仿真时间为 600 s,假设载体的北向和东向初始位置分别为 45.235 1°和 85.268 4°,高为 0,陀螺为激光陀螺,其常值漂移为 0.015 (°)/h,随机漂移为 0.001 (°)/h,加速度计常值零偏为 450 μg(g=9.8 m/s^2),随机漂移为 10 μg,里程计的刻度系数误差为 2‰,载体在完成粗对准后的失准角为(3°,3°,10°) 仿真结果如图 1～3 所示。

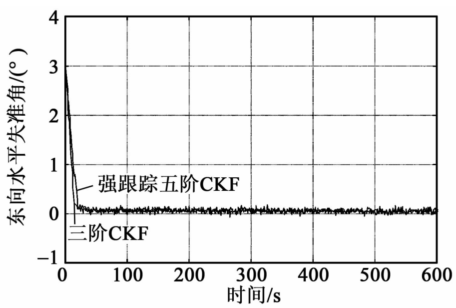

图 1　东向水平失准角

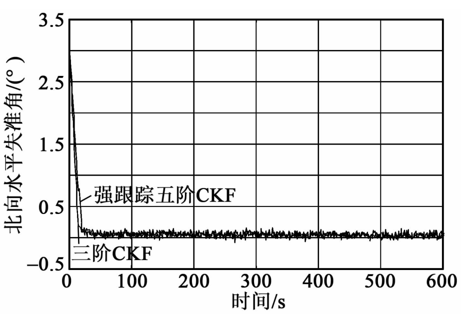

图 2　北向水平失准角

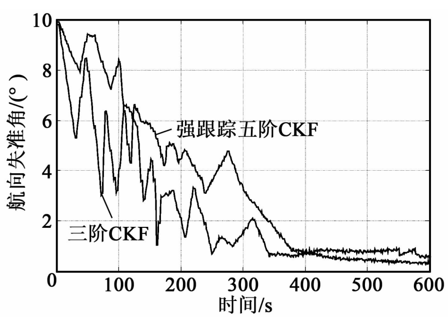

图 3　航向失准角

由图 1～3 可知,当失准角是小角度时,三阶容积滤波和强跟踪五阶 CKF 滤波的滤波效果相近。图 3 中,当失准角为大角度时,强跟踪五阶 CKF 滤波与 3 阶 CKF 滤波方式相比,其对于失准角的估计精度有所提高,就估计时间而言,由于强跟踪五阶 CKF 中径向积分采用时矩匹配法解算,与采用拉格朗日方程解算的三阶 CKF 算法相比,因其结构复杂,则收敛时间与三阶 CKF 相比为 345 s,而强跟踪五阶 CKF 滤波在 461 s 后开始收敛,有着明显的滞后。

图 4 为非白噪声下的滤波。由图可知,当系统噪声不能看成高斯白噪声的情况下,由于不符合三阶 CKF 滤波的噪声假设,使得对于航向失准角的估计不能随着时间的推移而有所收敛,但是强跟踪五阶 CKF 滤波,由于引进了将次优渐消因子 η_k,从而使有色噪声白化,使得最终的滤波效果可以收敛,从而实现最终的对准。

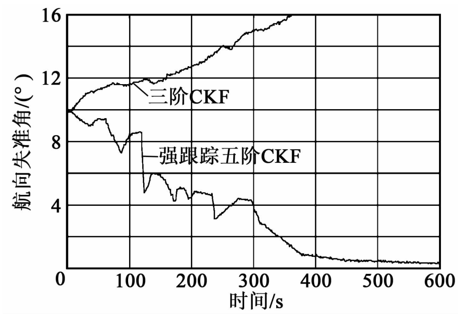

图 4　非白噪声下的滤波

4.2　实车实验

实车实验采用装用 GNSS/SINS/BD 的组合导航系统的无人车(UGV)进行测试,采用高精度差分 GPS 所测量的路线作为路径真值,GPS 的输出为 1 Hz,定位精度为 1 m。里程计的标度因数 K_D=0.035 45,定位精度度为 0.05%(CEP)。实验过程中,无人车经过匀速直线、加速、左转、右转及减速等运动过程。整个运动时长是 900 s。图 5 为实验用无人车。图 6 为实验路径。

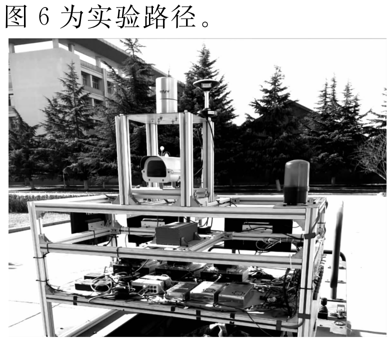

图 5　实验用无人车

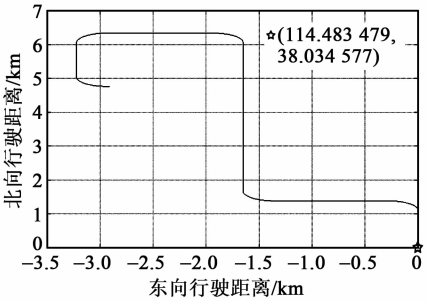

图 6 实验路径

以东向定位误差为例，对比实验过程中采用强跟踪五阶 CKF 算法和三阶 CKF 算法的定位误差。结果如图 7 所示。

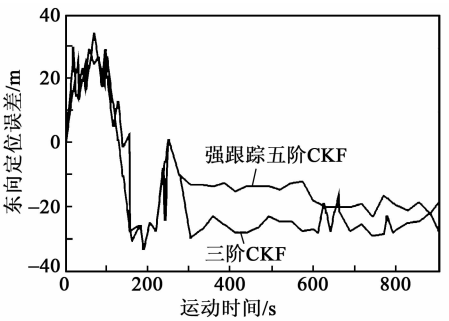

图 7 定位误差对比图

由图 7 可知，当捷联惯导/里程计组合导航系统采用强跟踪五阶 CKF 滤波算法时，对比捷联惯导/卫星组合导航系统的输出结果的位置误差为 20 m，当采用三阶 CKF 滤波算法输出的位置和捷联惯导/卫星组合导航系统输出位置做差，其结果为29 m，就东向定位精度而言，采用强跟踪五阶 CKF 滤波算法，其定位精度提高了 31.1%。

5 结束语

通过对强跟踪五阶 CKF 滤波和三阶 CKF 的结果对比可知，载体采用强跟踪五阶 CKF 滤波方式估计载体行进间精对准的参数，与三阶 CKF 滤波方式相比，在时间上有所延长，其原因主要是采用五阶以上的计算方法，在计算点数增加，使得计算时间有所延长，但滤波精度和滤波器在非白噪声下的鲁棒性有着明显的提高，极大的增强了滤波器在非白噪声条件下的适用性。

参考文献：

[1] 严恭敏，严卫生，徐德民. 简化 UKF 滤波在 SINS 大失准角初始对准中的应用[J]. 中国惯性技术学报，2008，16(6)：253-264.
YAN Gongmine，YAN Weisheng，XU Demin. Application of simplified UKF in SINS initial alignment for large misalignment angles[J]. Journal of Chinese Inertial Technology，2008，16(6)：253-264.

[2] 李东明. 捷联式惯导系统初始对准方法研究[D]. 哈尔滨：哈尔滨工程大学，2006.

[3] YU M J，PARK H W，JEON C B. Equivalent nonlinear error models ofstrapdown inertial navigation system [C]//S. l.：Guidance，Navigation，& Control Conference，1997：581-587.

[4] 李强，时荔蕙，梁开莉. 自适应渐消 EKF 方法及其在卫星跟踪中的应用[J]. 航天电子对抗，2009，25(3)：9-11.
LI Qiang，SHI Lihui，LIANG Kaili. An adaptive fading extended Kalman filtering method and its application for satellite- to-satellite tracking[J]. Aerospace Electronic Warfare，2009，25(3)：9-11.

[5] 程向红，李伯龙，王宇. 基于 PF 的 SINS 动基座初始对准[J]. 中国惯性技术学报，2009，17(3)：265-271.
CHENG Xianghong，LI Bolong，WANG Yu. SINS initial alignment on moving bases based on particle filter [J]. Journal of Chinese Inertial Technology，2009，17 (3)：265-271.

[6] ARASARATNAM I，HAYKIN S. Cubature Kalman filter[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2009，54(6)：1254-1269.

[7] JIA Bin，XIN Ming，CHENG Yang. High-degree cubature Kalman filter[J]. Automatica，2013，49(7)：510-518.

[8] GENZ A. Fully symmetric interpolatory rules for multiple hyper-spherical surfaces[J]. Journal of Computational and Applied Integrals Over Mathematics，2003，157(1)：187-195.

[9] 周东华，席裕庚，张钟俊. 一种带多重次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波器[J]. 自动化学报，1991，17(6)：689-695.
ZHOU Donghua，XI Yugeng，ZHANG Zhongjun. A suboptimal multiple fading extended kalman filter[J]. Acta Automatica Sinica，1991，17(6)：689-695.

[10] 肖恒，王清哲，付梦印，等. 里程计辅助陆用惯导行进间对准方法[J]. 中国惯性技术学报，2012，20(2)：140-145.
XIAO Xuan，WANG Qingzhe，FU Mengyin，et al. INS in-motion alignment for land-vehicle aided by odometer [J]. Journal of Chinese Inertial Technology，2012，20 (2)：140-145.