

口齿式定子驱动的平面超声电机特性分析

余九,贺红林

(南昌航空大学 航空制造工程学院,江西 南昌 330063)

摘要:推出口齿形定子驱动的压电平面电机,选定子的面外弯振、面内横齿弯振、面内纵齿弯振作为工作模式,利用面外弯振分别与面内纵齿弯振、面内横齿弯振的振动耦合,分别在纵、横齿驱动足上生成沿 xOz 、 yOz 面行进的椭圆轨迹,以推动动子沿 x 、 y 向移动,阐明了电机的运动原理。基于频率一致性目标优化了定子尺寸,并厘定电机最适驱动频率为 30 800 Hz。建立了定子机电耦合分析模型,计算出定子的瑞利阻尼,模拟出驱动足的椭圆轨迹,仿真得到在 250 V 电压激励时驱动足的 x 、 y 、 z 向振幅分别为 2.1 μm 、2.6 μm 和 2.0 μm 。探析了驱动电压、频率、相位差对电机振幅的影响。

关键词:口齿形定子;平面电机;驱动原理;优化设计;振动特性

中图分类号: TN384 **文献标识码:** A **DOI:** 10.11977/j.issn.1004-2474.2019.02.026

Property Analysis of Planar Ultrasonic Motor Driven by Teeth-shaped Stator

YU Jiu, HE Honglin

(School of Aeronautical Manufacturing, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

Abstract: A piezo-plane motor driven by the teeth-shaped stator is presented in this paper. The out-of-plane bending vibration, in-plane transverse tooth bending vibration, and in-plane longitudinal tooth bending vibration were selected as the working modes of the stator. Through the vibration coupling of the out-of-plane bending vibration with the in-plane longitudinal tooth bending vibration and the in-plane transverse tooth bending vibration respectively, the elliptical trajectories along the xOz and yOz planes are generated on the longitudinal and transverse teeth driving feet respectively to drive the movers to move along the x and y directions. The motion principle of the motor is introduced. The stator size is optimized based on the frequency consistency objective, and the optimum driving frequency of the motor is determined to be 30 800 Hz. An electromechanical coupling analysis model of the stator is established. The Rayleigh damping of the stator is calculated and the elliptical trajectories of the driving feet are simulated. The simulation results show that the amplitudes of the driving feet at the x -direction, y -direction and z -direction are 2.1 μm , 2.6 μm and 2.0 μm respectively at 250 V of voltage excitation. The influences of the drive voltage, frequency and phase difference on the motor amplitude are analyzed.

Key words: teeth-shaped stator; planar motor; driving principle; optimal design; vibration property

0 引言

超声电机是一种利用逆压电效应将电能转换为机械能的新型压电换能结构。与传统电机相比,压电超声电机具有低噪、微型化,可控性好,抗干扰性好等优点,在航空航天、智能制造及精密仪器等方面已得到广泛应用。超声电机分有旋转型、直线型、单自由度及多自由度等形式。1998年, Tomikawa

等^[1]利用矩形板面一纵和四弯进行电机驱动,该电机在 NEC 实现了产业化。1999年,日本多生电机利用三角形压电振子实现了薄型电机^[2],其速度达 450 mm/s。2010年, Won-Hee Lee 等^[3]提出了一种外型类似于碟翼的微型超声电机,其体积为 9 mm × 8 mm × 1 mm。2003年,李朝东等^[4]推出了卧板式大动力电机。2006年,赵淳生等^[5]推出方板两正交二弯模态驱动的电机,速度为 180 mm/s,推力为

收稿日期:2018-06-29

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51665040);江西省自然科学基金资助项目(20181BAB206024);江西省研究生创新基金资助项目(YC2017-S323)

作者简介:余九(1992-),男,江西丰城人,硕士生,主要从事精密驱动、复杂结构动力学研究。通信作者:贺红林(1967-),教授,硕士生导师。E-mail:hehonglin1967@163.com。

5 N。2008年,李宝玉等^[6]实现该型的单足驱动到双足驱动转换。2014年,刘英等^[7]设计了多种基于纵弯复合模态的多自由度电机,最大直线速度为1 182 mm/s。总体看来,由于发展时间不长,现已推出的平面超声电机型式有限^[8-9],电机性能离产业化还有很大差距。一方面,超声电机普遍存在动力小,效率低,工作欠稳定等问题,故而深入探析其力/电转换行为、摩擦驱动机理、理论建模和结构优化成为其重要研究内容^[10-11]。另一方面,由于电机较有限的结构形式,无法满足应用领域对其提出的多样需求,故探索电机新原理及定子超声换能结构仍是直线电机研究的重要方面^[12]。因此,为丰富平面超声电机的型式,本文提出口齿形定子的平面超声电机,对电机的振动驱动机理、动力学优化及运行特性等进行了研究。

1 电机运动原理及设计

1.1 定子工作模态及结构

电机定子采用口齿形结构(见图1(a)),由外框和内部对称的4根条状齿组成。在每根杆正反面末端位置均设置驱动足,齿的正反面和左、右侧面分别设置面内激振压电陶瓷片和面外激振压电陶瓷片。选取定子面外弯振、横齿面内弯振、纵齿面内弯振为电机的工作模态。面外弯振分别与横齿面内弯振、纵齿面内弯振耦合,分别在横齿、纵齿驱动足上合成出沿 xOz 、 yOz 面行进的椭圆轨迹,以推动电机沿 x 、 y 向移动,从而实现平面运动。

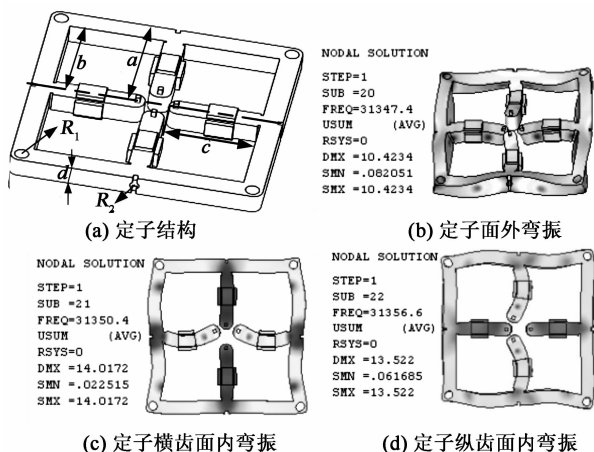


图1 平面电机的定子的结构及其工作模态

1.2 定子压电陶瓷激励配置

根据定子工作模态振型,为其配置的压电极化供电方式如图2所示。

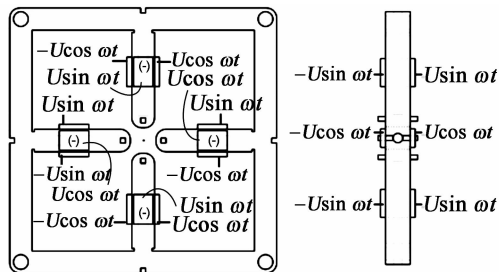


图2 定子上压电陶瓷的极化及其供电配置

图2中,采用正弦信号 $\sin \omega t$ 激励横齿面内弯振和纵齿面外弯振,余弦信号 $\cos \omega t$ 激励横齿面外弯振和纵齿面内弯振,这使横、纵齿面的内、外弯振响应的相位差皆为 90° 。各陶瓷片均沿背离粘贴面方向极化,且各陶瓷片与定子基体粘结的电极均接地以避免短路。为增强各工作模态的振幅,将各陶瓷片(PZT)尽量贴在弯振模态波峰(谷)处。

1.3 电机驱动机理

图3为纵齿在1个振动周期(T)内推动动子运动的情形。

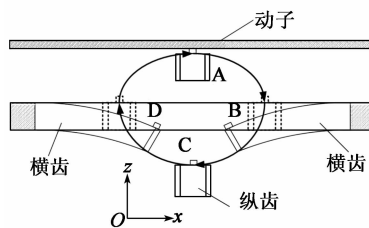


图3 定子在一个振动周期内运动

运动具体如下:

1) 在 $0 \sim T/4$ 振动时段内,定子面外弯振使纵齿由最大前弯状恢复成直杆状,纵齿上的驱动足与动子接触,而此时横齿由最大后弯状恢复成直杆状,且与动子不接触;定子面内弯振使纵齿由初始位置A行至B处。在该时段,纵齿上部驱动足与动子接触,推动动子沿 x 向移进第一个步距。

2) 在 $T/4 \sim T/2$ 振动时段内,定子面外弯振使纵齿由直杆状弯成最大后弯状,纵齿上的驱动足与动子脱离接触。此时,横齿由直杆状弯至最大前弯状,且横齿上的驱动足与动子接触;定子面内弯振使纵齿由位置B行至最大后弯曲处C。在该时段,定子横齿上的驱动足与动子接触,推动动子沿 y 向移进第二个步距。

3) 在 $T/2 \sim 3T/4$ 振动时段内,定子面外弯振使纵齿由最大后弯状恢复成直杆状,同时纵齿上的驱动足与动子保持脱离。此时,横齿由最大前弯状恢复至直杆状,且横齿上的驱动足与动子保持接触。

定子面内弯振使纵齿由最大后弯处 C 行至 D 处。在该时段,横齿上的驱动足与动子接触,推动动子沿 y 向移进第三个步距。

4) 在 $3T/4 \sim T$ 振动时段内,定子面外弯振使纵齿由直杆状弯成最大前弯状,纵齿上驱动足与动子接触。此时,横齿由直杆状弯至最大后弯处,且横齿上的驱动足与动子脱离。在该时段,定子面内弯振使纵齿由 D 处行至最大前弯处 A。在该时段,纵齿上的驱动足与动子接触,推动动子沿 x 向移进第四个步距。

2 结构动力学优化

2.1 定子有限元(FEM)建模

对于结构、边界条件简单的圆板或矩形板,可用解析法求取振型及其振动响应,但对于口齿形这样的复杂结构,则只能进行数值法求解其动力学特性,本文采用 FEM 模型如图 4 所示。定子的 FEM 模型动力学平衡方程为

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{K}\dot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{K}_m \mathbf{q} = \mathbf{F} \\ \mathbf{K}_m^T \boldsymbol{\delta} - \mathbf{E} \mathbf{q}_e = \mathbf{Q}_q \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{M} = \mathbf{A}_{e=1}^{net} \mathbf{m}_e$, $\mathbf{K} = \mathbf{A}_{e=1}^{net} \mathbf{k}_e$ 分别为总体质量矩阵和刚度矩阵, \mathbf{m}_e , \mathbf{k}_e 分别为单元质量矩阵、刚度矩阵; \mathbf{A}^{net} 为总体阵装配算子; \mathbf{K}_m 为压电耦合阵; \mathbf{F} 为定、动子接触面间广义作用力列阵; \mathbf{Q}_q 为压电单元电极上的电荷列阵; $\boldsymbol{\delta}$ 为结点位移阵; \mathbf{q}_e 为结点电荷自由度向量。

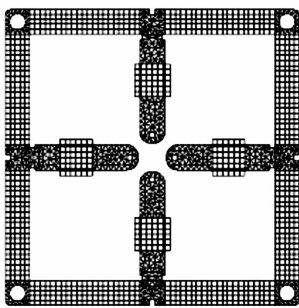


图 4 定子 FEM 模型

利用 ANSYS 求解式(1)时,采用 Solid185 对定子基体网格化,采用 Solid5 对 PZT 网格化。定子材料采用磷青铜,材料密度为 $8\ 270\ \text{kg/m}^3$,弹性模量为 $92.0\ \text{GPa}$,泊松比为 0.33 。压电陶瓷材料选 PZT8。

2.2 频率灵敏度分析

定子两相工作模式的频率应尽量接近,且振型应尽可能纯正,这样才能在驱动足激发出足够

的振幅以驱动动子。为此,对定子做频率一致性优化设计。优化前,需先对定子做频率灵敏度分析,频率灵敏度是指单位尺寸变化所引起的频率变化,定义:

$$s_j^i = \partial f_j^i / \partial p_j = (f_{v,j}^i - f_{o,j}^i) / \Delta p_j \quad (j = 1, 2, \dots, 6) \quad (2)$$

式中: f_j^i 为模式频率, $i = 1, 2$ 对应于两相工作模式; $f_{v,j}^i$, $f_{o,j}^i$ 分别为定子初始尺寸及尺寸微变后对应的频率; Δp_j 为尺寸微变量。

基于图 1(a)定子结构及其初值(见表 1)建立定子 FEM 模型,并提取 $f_{v,j}^i$,再令 $\Delta p_j = 0.5\ \text{mm}$,并提取定子发生尺寸微变后的频率 $f_{o,j}^i$,最后依据式(2)求得各尺寸的频率灵敏度,如图 5 所示。

表 1 优化前、后定子尺寸

尺寸	a/mm	b/mm	c/mm	d/mm	R_1/mm	R_2/mm
初始值	26.5	22.0	20.0	6.0	1.0	1.0
优化值	27.0	22.5	19.9	5.6	1.5	1.0

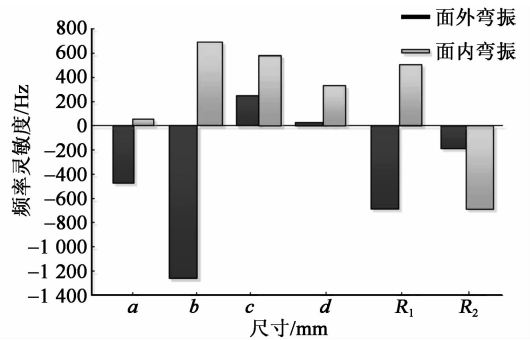


图 5 定子结构尺寸的频率灵敏度

根据图 5 优化定子尺寸得到定子优化后尺寸如表 1 所示。根据优化后的尺寸得到定子的三相工作模式(见图 1(b)~(d))频率分别为 $31\ 347\ \text{Hz}$, $31\ 350\ \text{Hz}$ 和 $31\ 356\ \text{Hz}$,最大频差为 $9\ \text{Hz}$,不超过模式频率的 0.03% ,频率一致性良好。定子三相模式振型纯正,有利于定子振动响应控制。

3 定子振动响应及运动调节

3.1 谐响应分析

谐响应分析可判断定子工作模式附近是否存在干扰模式,并为剔除干扰模式确保电机正常运行提供依据。因为干扰模式的存在将导致电机无法正常运行。对定子的 FEM 模型施加 $250\ \text{V}$ 的简谐电压,设置频率分析范围为 $30.9 \sim 31.5\ \text{kHz}$,在频率分析范围内设置 100 个频率分析点对定子做谐响应分析,得到的驱动足幅频特性如图 6(a)所示。由图

可见,驱动足在 x 、 y 、 z 向均只出现单个峰值,均未出现干扰模态,这说明口齿型定子具有良好的驱动特性。定子只有以最适频率驱动,才能产生最大振幅,使电机性能最优。因此,对频区 30~32 kHz 进行细化扫频,得到定子最适驱动频率为 30 800 Hz。

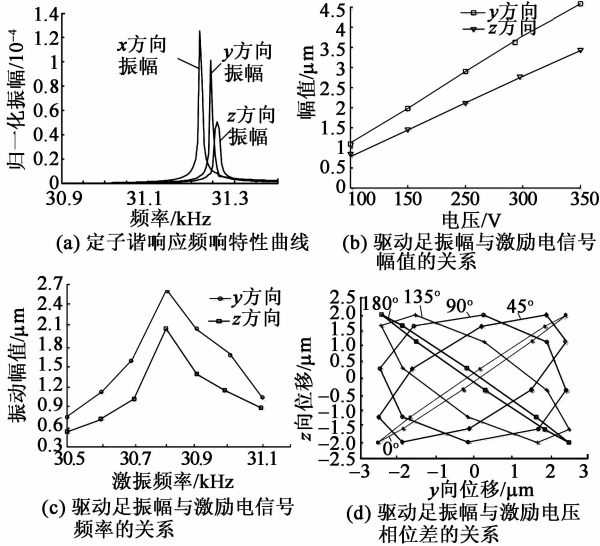


图6 定子频响及运动调节特性

3.2 瞬态振动特性

3.2.1 瑞利阻尼的选择

在求解定子瞬态振动特性时,必须先设置定子的瑞利阻尼,否则求解将不会收敛。瑞利(Rayleigh)阻尼假设结构的阻尼矩阵 C 是质量矩阵 M 和刚度矩阵 K 的组合,即

$$C = \alpha M + \beta K \tag{3}$$

式中 α, β 皆为比例系数,分别具有 s^{-1} 和 s 的量纲,可用实际测量到的结构阻尼比来确定。因此,将式(3)分别左乘振型的转置 φ_n^T 和右乘振型 φ_n ,可得

$$C_n = \alpha M_n + \beta K_n \tag{4}$$

式中 C_n, M_n, K_n 分别为第 n 阶振型的阻尼系数、振型质量和刚度,且

$$C_n = \varphi_n^T C \varphi_n \tag{5}$$

$$M_n = \varphi_n^T M \varphi_n \tag{6}$$

$$K_n = \varphi_n^T K \varphi_n \tag{7}$$

瑞利阻尼是一种正交阻尼。假设结构体系的阻尼满足正交条件,并采用振型叠加法求解,则不必构造整体阻尼,而直接采用振型阻尼比 ϵ_n 即可,因为实际结构阻尼测量中都是直接给出阻尼比,即

$$C_n = 2\epsilon_n \omega_n M_n \tag{8}$$

$$\omega_n^2 = K_n / M_n \tag{9}$$

将式(8)、(9)代入式(4)可得

$$\epsilon_n = \frac{\alpha}{2\omega_n} + \frac{\beta\omega_n}{2} \tag{10}$$

如果给定任意 2 个振型阻尼比 ϵ_n 分别代入式(10),即可得关于 α 和 β 的 2 个线性代数方程,解得 α 和 β ,则确定了瑞利阻尼。假设 ϵ_i 和 ϵ_j 给定,则可计算出 α 和 β 的矩阵形式为

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_i \\ \epsilon_j \end{bmatrix} \tag{11}$$

得到其解析式为

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \begin{bmatrix} \omega_j & -\omega_i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_i \\ \epsilon_j \end{bmatrix} \tag{12}$$

由谐响应分析可知,口齿形定子的最适驱动频率为 30 800 Hz,这里取 $\omega_i = 30 750$ Hz, $\omega_j = 30 850$ Hz, $\epsilon_n = 0.005$,代入式(10)求解,由式(12)可得瑞利阻尼为

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.59 \times 10^{-8} \\ 967.11 \end{bmatrix} \tag{13}$$

3.2.2 瞬态特性求解

只有定子驱动足振幅达到微米级别,定子的振动才能通过摩擦转换为动子的宏观运动。为此,在定子 FEM 模型的两相 PZT 施加 30 800 Hz、250 V 等幅、同频且相位差为 $\pi/2$ 的交变电压,且施加第 3.2.1 节所求得阻尼,启动 ANSYS 瞬态解算器,求得纵齿和横齿的椭圆运动轨迹如图 7 所示。可见,定子面内、外工作模态均被有效激励,驱动足产生了微米级振动,其 x 、 y 、 z 向振幅分别达 $2.1 \mu\text{m}$ 、 $2.6 \mu\text{m}$ 、 $2.0 \mu\text{m}$,电机有望得到较好性能。

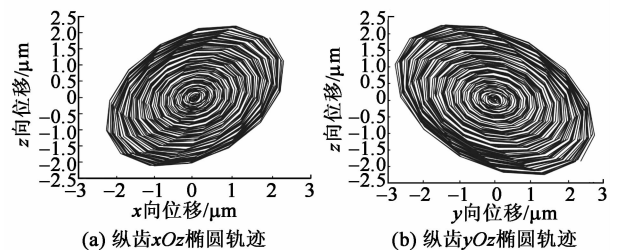


图7 定子定频激励时驱动足运动轨迹

3.3 电机运动调节特性

压电平面电机的优势之一便是多样化的振动调节特性。考虑到电机采用简谐信号驱动,故分别就驱动信号的幅值、频率、相位差对驱动足运动的影响进行探索。首先对定子模型施加不同幅值的驱动电

压,得到驱动足调压特性如图6(b)所示。由图可见,驱动电压幅值与驱动足振幅呈现一定线性关系,增大电压,驱动足切向、法向振幅也相应地增大。

采用等幅、不同频率的驱动信号激励定子模型,得到驱动足振幅与驱动频率间关系如图6(c)所示。由图可见,当驱动频率低于工作模态频率时,增大驱动频率,则电机振幅增加,但当驱动频率高于工作模态频率时,增大频率却使振幅快速下降,这是因为驱动频率与工作模态频率不等时,驱动足产生差拍振动现象,拍频率恰为驱动频率与激励频率的差,差拍振动导致驱动足振幅减小。

对定子面内、外弯振激励陶瓷片施加不同相位差的电信号,得到驱动足振幅与相位差间关系如图6(d)所示。由图可见,当相位差为 90° 时,驱动足轨迹为规范的椭圆;当相位差为 45° 时,驱动足轨迹变为倾斜态扁椭圆;当相位差为 0° 时,驱动足轨迹退化为斜直线。所以,要以调相法调节电机振幅,驱动信号相位差只能控制在 90° 附近较小的区域,否则电机可能无法正常工作。

4 装配结构设计

图8为电机装配结构。支座上有螺纹孔,用以固定支座在别的机械结构上;盖板上设置球槽和安装孔,预紧滚珠安装在盖板球槽内,以减小摩擦阻力,盖板通过螺钉固定在支座上;定子通过螺栓和弹性垫片固定在支座上。

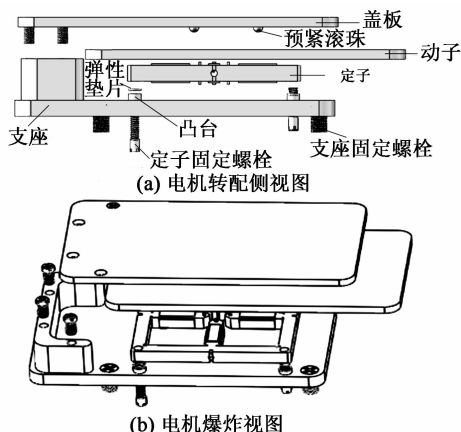


图8 电机装配结构设计

由于定子的4个端部恰为工作模态的节点,故在装配结构选定四端部圆孔作为定子的固定点,因为在该处将定子固定将对定子工作模态产生最小的影响,在该处用螺钉将定子固定。考虑到振子需做面外弯振,故为防止驱动足触碰支座底板而影响振

子振动,故在支座上设置高度为 $1\sim 2\text{ mm}$ 的凸台。定子下表面与定子驱动足接触,同时与顶部盖板通过滚珠构成滚动副连接。电机通过螺栓、预紧滚珠和弹性垫片调节定/定子间界面的预紧力。该装配结构能够保证电机定子具有2个方向的平面运动。

5 结论

1) 提出口齿形定子谐振驱动的平面电机,选定口齿形结构面外弯振、面内纵齿弯振、面外横齿弯振作为工作模态以驱动电机的平面运动。

2) 配置出定子压电极化供电模式,得到定子优化尺寸 $54\text{ mm}\times 45\text{ mm}\times 5.8\text{ mm}$,设计出电机结构。

3) 建立定子的机电耦合分析模型并模拟出其纵、横齿驱动足的两相椭圆轨迹,验证了电机原理。

4) 正常激励时驱动足振幅可达微米级。当驱动电压为 250 V 时,驱动足沿 x 、 y 、 z 向振幅分别为 $2.1\text{ }\mu\text{m}$ 、 $2.6\text{ }\mu\text{m}$ 和 $2.0\text{ }\mu\text{m}$ 。

参考文献:

- [1] TAKANO T, ENOKI Y, KITASHIMA S, et al. Small-sized ultrasonic linear motor using radial and nonaxisymmetric vibration modes of an annular plate [C]//S. I.: Ultrasonics Symposium, IEEE, 2002.
- [2] LI Xia, CHEN Weishan, XIE Tao, et al. Novel high torque bearingless two-sided rotary ultrasonic motor [J]. Journal of Zhejiang University Science A, 2007, 8 (5): 786-792
- [3] LEE W H, KANG C Y, PAIK S D. Butterfly-shaped ultra slim piezoelectric ultrasonic linear motor [J]. Sensors and Actuators A, 2011(168): 127-130.
- [4] 李朝东, 姚华. 压电式微机器人行走驱动器: CN200101221113451. 8 [P]. 2001-06-08.
- [5] 赵淳生, 金家楣. 方板式直线超声电机及其电激励方法: CN200710020965. 7 [P]. 2007-04-05.
- [6] 李玉宝, 时运来, 赵淳生, 等. 高速大推力直线型超声电机的设计与实验研究 [J]. 中国电机工程学报, 2008, 28 (30): 49-53.
LI Yubao, SHI Yunlai, ZHAO Chunsheng, et al. Design and experimental study of high-speed and large-thrust linear ultrasonic motor [J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(30): 49-53.
- [7] CHEN W, LIU Y, LIU J, et al. A linear ultrasonic motor using bending vibration transducer with double driving feet [J]. Ferroelectrics, 2010, 400(1): 221-230.
- [8] 王京山, 赵学涛. 平面超声波电动机的研究 [J]. 微特电

- 机,2013,41(7):8-9.
- WANG Jinsan, CHAO Xuetao. Research on ultrasonic motor [J]. Small and Special Electrical Machines, 2013,41(7):8-9.
- [9] 姚志远,赵妹淳,江超,等.扇形直线超声电机的结构设计[J].振动测试与诊断,2013,33(1):40-43
- YAO Zhiyuan, ZHAO Meichun, JIANG Chao, et al. Design of a fan-shaped ultrasonic motor[J]. Vibration, Measurement & Diagnosis, 2013,33(1):40-43.
- [10] 贺红林,廖永林,凌普.双兰杰文振子纵弯复合模态驱动的压电平面电机[J].电机与控制学报,2016,20(12):42-50.
- HE Honglin, LIAO Yonglin, LIN Pu. Design of a novel planar motor using longitudinal and bending modes of H-shaped stator's two langevin vibrators[J]. Electric Machines and Control, 2016,20(12):42-50.
- [11] 贺红林,何文丛,刘文光.U型变截面薄板面内复合模态驱动的直线超声电机[J].振动与冲击,2014,18(4):1-7
- HE Honglin, HE Wencong, LIU Wenguang. A linear ultrasonic motor driven by an U-shaped stator's in-plane hybrid vibration modes[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014,18(4):1-7.
- [12] 石胜君,陈维山,刘军考.一种基于纵弯夹心式换能器的直线超声电机[J].中国电机工程学报,2007,27(18):30-34.
- SHI Shengjun, CHEN Weishan, LIU Junkao. Ultrasonic Linear motor using longitudinal and bending multimode bolt-clamped langevin type transducer[J]. Proceedings of the CSEE, 2007,27(18):30-34.
-
- (上接第 268 页)
- [3] 蒋鑫.喷嘴挡板阀用位移放大 GMA 的研究[D].南京:南京航空航天大学,2014.
- [4] 俞军涛,焦宗夏,吴帅.基于液压微位移放大结构的新型压电陶瓷直接驱动阀设计及仿真[J].机械工程学报,2013,49(2):151-158.
- YU Juntao, JIAO Zongxia, WU Shuai. Design and simulation of a new type of piezoceramic direct driving valve based on the hydraulic micro displacement amplification structure [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013,49(2):151-158.
- [5] 杨朝舒,何忠波,李冬伟,等.伺服阀用液压放大式 GMA 的设计及建模[J].压电与声光,2014,36(6):963-966.
- YANG Zhaoshu, HE Zhongbo, LI Dongwei, et al. Design and modeling of hydraulic amplifying GMA for servo valve [J]. Piezoelectrics & Acousto-optics, 2014,36(6):963-966.
- [6] KONEDA P, MEGLI T, ERVIN J. Electronic valve actuator having hydraulic displacement amplifier: US 7314026 B2[P]. 2008-01-01.
- [7] CHAKRABARTI S, DAPINO M J. A dynamic model for a displacement amplified magnetostrictive driver for active mounts [J]. Smart Materials & Structures, 2010,19(19):055009.
- [8] YANG Zhaoshu, HE Zhongbo, LI Dongwei, et al. Hydraulic amplifier design and its application to direct drive valve based on magnetostrictive actuator[J]. Sensors & Actuators: A Physical, 2014,216(3):52-63.
- [9] 郑晓静.圆薄板大挠度理论及应用[M].长春:吉林科学技术出版社,1990.
- [10] 钱伟长,叶开沅.圆薄板大挠度问题[J].物理学报,1954,10(3):209-238.
- QIAN Weichang, YE Kaiyuan. Large deflection problems of circular thin plates[J]. Acta Physics, 1954,10(3):209-238.
- [11] 盛敬超.液压流体力学[M].北京:机械工业出版社,1980.