

# 含槽变截面悬臂式压电俘能器性能研究

蔡浩,周星德

(河海大学 土木与交通学院,江苏 南京 210098)

**摘要:**为了俘获更大的能量,提出了一种含槽变截面悬臂式压电俘能器。首先,梁形式采用给定的指数函数进行变化,并且在内部挖槽;其次,推导对应的振动方程,参考相关文献确定振型表达式,进而写出相应的特征方程,推导出电压和输出功率表达式,并根据电压和输出功率确定最优指数。结果表明,在保持梁长度不变的前提下,锥形梁的弯曲程度系数越大,则输出电压及功率越大,但系统的特征频率也将变大。

**关键词:**变截面悬臂梁;挖槽;指数形梁;压电俘能器;振型

**中图分类号:**TN384;TM22;O326 **文献标志码:**A

## Study on Performance of Variable-Sectional Cantilever Piezoelectric Energy Harvester with Groove

CAI Hao, ZHOU Xingde

(College of Civil and Transportation Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

**Abstract:** In order to capture more energy, a variable-sectional cantilever piezoelectric energy harvester with groove was proposed in this paper. Firstly, the beam form is changed according to a given exponential function, and the groove is dug inside the beam. Secondly, the corresponding vibration equation is deduced, and the expression of vibration mode is determined by referring to relevant literature, and then the corresponding characteristic equation is established, the expression of voltage and output power is derived, and the optimal exponent is determined according to the voltage and output power. The results show that under the premise of keeping the beam length unchanged, the larger the bending degree coefficient of the tapered beam, the larger the output voltage and power, but the larger the characteristic frequency of the system.

**Key words:** variable-sectional cantilever beam; grooving; beam of exponential type; piezoelectric energy harvester; mode of vibration

### 0 引言

微机电系统可以直接从工作环境中获得能量,这对于存在环境激励而又更换电池难的场合具有重要意义,已经成为研究的热点之一<sup>[1]</sup>。压电俘能器有两端固定式、一固一铰式、悬臂式,可以适用于不同场合,其中,悬臂式压电俘能器研究较多,文献<sup>[2]</sup>提出增加压电陶瓷铺设数目来增大悬臂梁固有频率,减小自由端最大位移,同时保持各监测点应变值不变。增大俘获能量的方法主要有以下两种:

1) 采用并联的方式<sup>[3]</sup>。虽然该方式结构复杂,但在增加能量的同时,可以加宽带宽。

2) 采用变截面形式。近期有关此方面的研究较多,梁形式可以采用等厚度梯形<sup>[4-5]</sup>、等厚度矩形+

三角形<sup>[6]</sup>、变厚度圆台<sup>[7]</sup>等,结构稍微复杂,但俘获能量有明显提高。为了进一步提高俘获的能量,在采用变截面形式的前提下,近期出现了在梁基体上挖槽来提高俘获能量的方式<sup>[8-9]</sup>,可以是等厚度单槽、等厚度多槽、变厚度单槽等,通过仿真可看出俘获的能量得到提高。

目前有关梁基体挖槽的研究,梁形式还是采用矩形+三角形的模式,为了进一步提高俘获的能量,本文提出了按指数变化的梁形式,以期获得更大的俘获能量,具体过程如下:

1) 梁形式采用指数变化,并且内部挖槽。

2) 推导对应的振动方程,确定振型表达式,进而写出特征方程。

收稿日期:2021-08-27

基金项目:国家自然科学基金资助项目(41977240)

作者简介:蔡浩(1997-),男,江苏省盐城市人,硕士生,主要从事结构振动与控制方向的研究。通信作者:周星德(1964-),男,安徽省淮南人,教授,博士生导师,主要从事结构振动与控制方向的研究。

3) 推导电压和输出功率表达式,并根据电压和输出功率确定最优指数。

最后,本文给出一个仿真实例说明了该方法的有效性。

### 1 悬臂式压电俘能器模型

#### 1.1 模型详图

图1为悬臂式压电俘能器结构图( $n > 1$ ),图中  $L$  为结构截断前的总长度,  $L_1 = L/3$  为结构截断后自由端与截断前自由端的距离,  $L_2 = 2L/3$  为结构截断前压电片与自由端的距离,  $h$  为梁的总高度,  $b_m$  为压电片的宽度,  $b_r$  为梁固定端的宽度。结构在  $x = L_1$  处截断并安装电磁激励器。

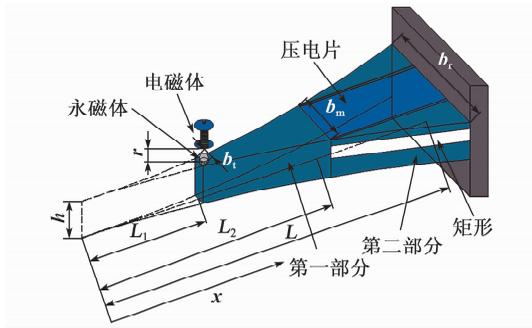


图1 悬臂式压电俘能器结构图

图2为压电俘能器第二部分详图,梁的总高度  $h = h_1 + h_2 + h_3 + h_p$ , 其中  $h_2, h_p$  分别为矩形槽和压电片的厚度,  $h_1, h_3$  分别为矩形槽与梁上下端之间的距离。中性轴与压电层中点的距离为  $y_c$ 。

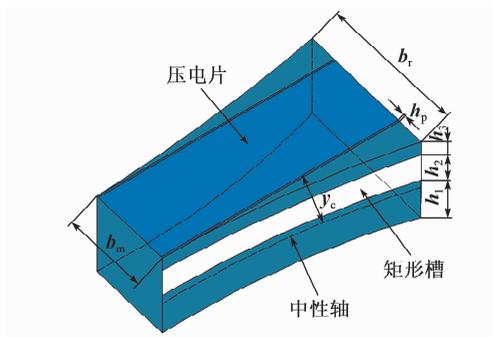


图2 第二部分详图

#### 1.2 运动方程

利用欧拉伯努利梁理论建立模型<sup>[10]</sup>为

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + c(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (1)$$

其中:

$$M(x,t) = E(x)I(x)\partial^2 y(x,t)/\partial x^2 \quad (2)$$

$$m(x) = \rho A(x) \quad (3)$$

式中:  $M(x,t), c(x), m(x), E(x), I(x)$  分别为弯矩、阻尼系数、单位长度质量、刚度和惯性矩;  $\rho$  为密度;  $y(x,t)$  为横向位移;  $A(x)$  为横截面积;  $f(x,t)$  为外激振力。

对于等厚度锥形梁,宽度  $b(x) = b_L (x/L)^n$ , 其中  $b_L$  为锥形梁固定端的宽度,锥形梁的弯曲程度由系数  $n$  决定,任意位置的横截面积和任意位置的惯性矩为

$$A(x) = A_L (x/L)^n \quad (0 \leq x \leq L) \quad (4)$$

$$I(x) = I_L (x/L)^n \quad (0 \leq x \leq L) \quad (5)$$

$$A_L = b_L h \quad (0 \leq x \leq L) \quad (6)$$

$$I_L = \frac{b_L h^3}{12} \quad (0 \leq x \leq L) \quad (7)$$

无阻尼自由振动为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

令梁的位移为  $y(x,t) = W(x)e^{i\omega t}$ , 其中  $\omega$  为结构的自振频率,代入式(8)可得:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right] - \omega^2 \rho A(x) W(x) = 0 \quad (9)$$

将式(4)、(5)代入式(9)可得:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI_L \left( \frac{x}{L} \right)^n \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right] - \omega^2 \rho A_L \left( \frac{x}{L} \right)^n W(x) = 0 \quad (10)$$

将式(6)微分可得:

$$EI_L \left[ \frac{n(n-1)}{L^2} \left( \frac{x}{L} \right)^{n-2} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{2n}{L} \left( \frac{x}{L} \right)^{n-1} \frac{d^3 W}{dx^3} + \left( \frac{x}{L} \right)^n \frac{d^4 W}{dx^4} \right] - \rho A_L \left( \frac{x}{L} \right)^n \omega^2 W = 0 \quad (11)$$

图1中第一部分和第二部分的振型可表示为

$$W_1(x) = x^{-n} (C_1 J_n(\lambda \sqrt{x}) + C_2 Y_n(\lambda \sqrt{x}) + C_3 I_n(\lambda \sqrt{x}) + C_4 K_n(\lambda \sqrt{x})) \quad (12)$$

$$W_2(x) = x^{-n} (C_5 J_n(\lambda \sqrt{x}) + C_6 Y_n(\lambda \sqrt{x}) + C_7 I_n(\lambda \sqrt{x}) + C_8 K_n(\lambda \sqrt{x})) \quad (13)$$

$$\lambda^4 = 16\rho A_L \omega^2 L^2 / (EI_L) \quad (14)$$

式中:  $A_L, I_L$  分别为  $x = L$  时的截面面积和惯性矩;  $J_n, Y_n$  分别为第一、二类的  $n$  阶贝塞尔函数;  $I_n, K_n$  分别为第一、二类的  $n$  阶修正贝塞尔函数;  $C_1, C_2,$

$C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$  为待定常数。

图2中第二部分结构的中性轴  $N_a(x)$  和每层的惯性矩  $I_j(x)$  分别为

$$N_a(x) = \frac{1}{2 \sum_{j=1}^4 E_j h_j(x)} \sum_{j=1}^4 E_j h_j(x) \times \left[ 2 \left( \sum_{i=1}^j h_{i-1}(x) \right) + h_j(x) \right] \quad (L_2 \leq x \leq L) \quad (15)$$

$$I_j(x) = \sum_{j=1}^4 \frac{b_j(x)}{3} \left[ N_a(x)^3 + \frac{1}{E_1} \sum_{m=2}^4 (E_{m-1} - E_m) \times \left( \sum_{i=1}^{m-1} h_i(x) - N_a(x) \right) \right] \quad (L_2 \leq x \leq L) \quad (16)$$

式中  $E_j, h_j$  分别为第  $j$  层的杨氏模量和厚度,  $j$  与  $i$  取值分别为 1, 2, 3, 4 和 2, 3, 4。

将压电层中点作为  $y_0, y_0$  到  $N_a(x)$  的距离为

$$y_c(x) = \frac{h_1(h_p + h_1 + 2h_2) + h_3(h_p + h_3 + 2h_1)}{2E_p h_p / E_b + 2(h_1 + h_3)} \quad (L_2 \leq x \leq L) \quad (17)$$

### 1.3 边界条件及连续性条件

边界条件为

1) 当  $x=L_1$  时, 有:

$$\frac{EI_1(x)}{L} \frac{d^2 W_1(L_1)}{dx^2} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{EI_1(x)}{L^2} \frac{d^3 W_1(L_1)}{dx^3} = 0 \quad (19)$$

2) 当  $x=L$  时, 有:

$$W_2(L) = 0 \quad (20)$$

$$dW_2(L)/dx = 0 \quad (21)$$

连续性条件为

当  $x=L_2$  时, 有:

$$W_1(L_2) = W_2(L_2) \quad (22)$$

$$\frac{dW_1(L_2)}{dx} = \frac{dW_2(L_2)}{dx} \quad (23)$$

$$\frac{EI_1(x)}{L} \frac{d^2 W_1(L_2)}{dx^2} = \frac{EI_2(x)}{L} \frac{d^2 W_2(L_2)}{dx^2} \quad (24)$$

$$\frac{EI_1(x)}{L^2} \frac{d^3 W_1(L_2)}{dx^3} = \frac{EI_2(x)}{L^2} \frac{d^3 W_2(L_2)}{dx^3} \quad (25)$$

### 1.4 受迫振动的解及输出电压

特征方程为

$$\boldsymbol{\eta}_{8 \times 8} \mathbf{C}_{8 \times 1} = 0 \quad (26)$$

式中:  $\boldsymbol{\eta}$  为特征方程;  $\mathbf{C}$  为模态系数向量, 其表达式为

$$\mathbf{C} = [C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8]^T \quad (27)$$

令系数阵行列式为 0 可求系统特征值, 即:

$$|\boldsymbol{\eta}_{8 \times 8}| = 0 \quad (28)$$

在梁的端部施加荷载  $\mathbf{P} \sin(\omega' t)$  (其中  $\omega'$  为外激频率), 则有:

$$y_{1,2}(x, t) = W_{1,2}(x) G L^{-1} p W_2(L) \sin(\omega' t) / \alpha \quad (29)$$

其中:

$$\alpha = \int_{L_1}^L W_{1,2}^2(x) dx (\omega^2 - \omega'^2 + 2\zeta \omega \omega') \quad (30)$$

$$G = \int_{L_1}^{L_2} W_1(x) dx + \int_{L_2}^L W_2(x) dx \quad (31)$$

式中  $\zeta$  为阻尼比。

电磁激励器通电后, 线圈在梁端产生的力  $p^{[9]}$  为

$$p = \frac{N_c I A B_p}{2L_e} \left[ \frac{L_p + r}{\sqrt{D^2 + (L_p + r)^2}} - \frac{r}{\sqrt{D^2 + r^2}} \right] \quad (32)$$

式中:  $N_c$  为线圈的转数;  $I$  为通电线圈电流大小;  $A$  为横截面积;  $D$  为永磁体的半径。

由压电片产生的输出电压为

$$V_p = - \frac{e_{31} b_p y_c}{C_p \times L^2} \left[ \frac{dW_2(L)}{dx} - \frac{dW_2(L)}{dx} \right] \times \frac{\chi}{\beta} \quad (33)$$

$$\chi = G L^{-1} p W_2(L) \sin(\omega' t) \quad (34)$$

$$\beta = \int_{L_1}^L W_{(1,2)}^2(x) dx [(\omega^2 - \omega'^2) + (2\zeta \omega \omega')] \quad (35)$$

$$\int_{L_1}^L W_{(1,2)}^2(x) dx = \int_{L_1}^{L_2} W_1^2(x) dx + \int_{L_2}^L W_2^2(x) dx \quad (36)$$

式中  $C_p$  为电容。

## 2 仿真分析

利用第一节给出的模型, 通过仿真对图 1、2 所示的压电俘能器的性能进行评估, 梁和压电贴片的尺寸如表 1 所示。

表 1 梁和压电贴片的尺寸

参数	取值
长度/m	0.276
根部宽度/m	0.025
密度/(kg · m <sup>-3</sup> )	2700
厚度/m	0.006
杨氏模量/GPa	71
第一部分长度/m	0.138

续表

参数	取值
长度/m	0.138
密度/( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	7500
宽度/m	0.012
厚度/m	0.5
杨氏模量/GPa	47.62
压电常数/( $\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ )	-16.6

通过改变电磁激励器的输入值,使施加的外激力恒定为  $0.1 \text{ N}$ ,  $C_p = 65 \text{ nF}$ , 压电俘能器的  $\zeta = 0.0022$ 。图3为使用 MATLAB 给出了当锥形梁的弯曲程度系数  $n = 1.8, 1.6, 0.8$  时,输出电压与外激频率间的关系。

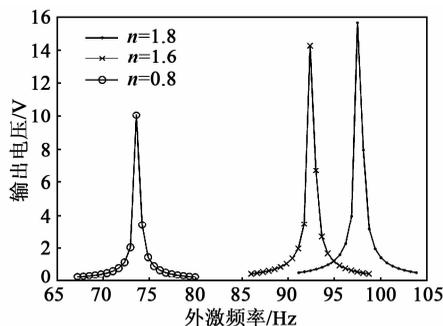
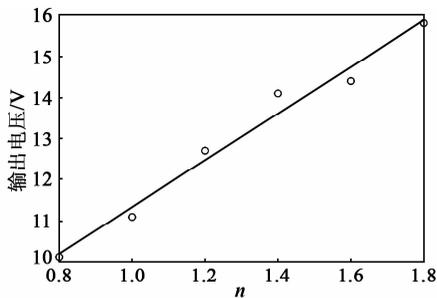


图3 外激频率与输出电压的关系图

由图3可知,将  $n = 0.8 \sim 1.8$  时可得到不同  $n$  值对应的输出电压,将  $n$  与输出电压进行回归分析,得到的结果如图4所示。

图4 不同  $n$  值与输出电压的关系图

### 3 结束语

对于悬臂式压电俘能器,文献[8-10]已经验证了挖槽能够提高输出电压,其梁形式采用矩形+三角形的简单模式。为了进一步提高俘获的能量,本文提出了按指数变化的梁形式,以期获得更大的俘获能量。通过仿真发现,在保持梁长度不变的前提下,指数越大,则输出电压及功率越大,但系统的特征频率也变大,因此,在实际应用中应根据实际需要确定合适的指数。

### 参考文献:

- [1] HAJHEIDARI P, STIHARU I, BHAT R. Performance of non-uniform functionally graded piezoelectric energy harvester beams [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2020, 31(13): 1604-1616.
- [2] 杨瑞, 孙霞阳, 杨胜兵. 基于压电陶瓷的等变厚度悬臂梁特性研究[J]. 压电与声光, 2020, 42(1): 57-62.  
YANG Rui, SUN Xiayang, YANG Shenbin. Research on characteristics of equivariable thickness cantilever beam based on piezoelectric ceramics [J]. Piezoelectrics & Acousto-optics, 2020, 42(1): 57-62.
- [3] 王爽, 吕宝占. 典型压电俘能器的发展现状与俘能机理分析[J]. 电子元件与材料, 2018, 37(11): 87-98.
- [4] 何挺, 马剑强, 刘莹, 等. 一种基于梯形压电悬臂梁的能量采集器研究[J]. 压电与声光, 2012, 34(6): 872-876.  
HE Ting, MA Jianqiang, LIU Ying, et al. Research on an energy collector based on trapezoidal piezoelectric cantilever beam [J]. Piezoelectrics & Acousto-optics, 2012, 34(6): 872-876.
- [5] SUSHANTA K, HARSHAL N. Piezoelectric vibration energy harvester with tapered substrate thickness for uniform stress [J]. Microsystem Technologies, 2020, 27(1): 105-113.
- [6] 王姣姣, 曹东兴, 姚明辉. 变截面悬臂梁压电俘能器动力学特性分析[J]. 压电与声光, 2018, 40(5): 727-731.  
WANG Jiaojiao, CAO Dongxing, YAO Minghui. Dynamic characteristics analysis of piezoelectric energy harvester with variable cross-section cantilever beam [J]. Piezoelectrics & Acousto-optics, 2018, 40(5): 727-731.
- [7] BOIANGIU M, CEAUSU V, UNTAROIU C D. A transfer matrix method for free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams with variable cross section [J]. Journal of Vibration and Control, 2016, 22(11): 2591-2602.
- [8] RAJU S S, UMAPATHY M, UMA G. Design and analysis of high output piezoelectric energy harvester using non uniform beam [J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2020, 27(3): 218-227.
- [9] RAJU S S, UMAPATHY M, UMA G. Cantilever piezoelectric energy harvester with multiple cavities [J]. Smart Materials and Structures, 2015, 24(11): 1-11.
- [10] ABDELKEF A, BARSALLO N. Comparative modeling of low frequency piezomagnetoelastic energy harvesters [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2014, 25(14): 1771-1785.